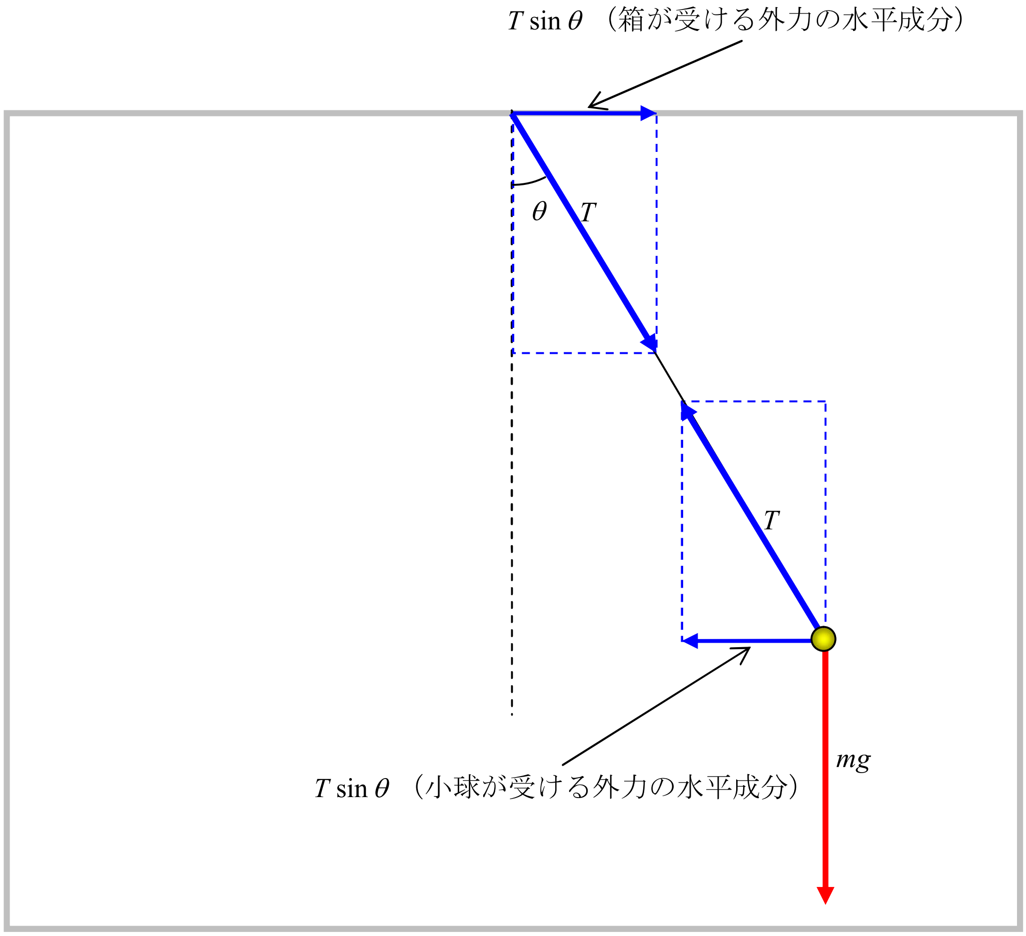
18. 保存則

(1)



箱が受ける外力の水平成分と小球が受ける外力の水平成分が打ち消し合うので，
運動量保存則が成り立つ。

(4)

系（箱と小球）にはたらく水平方向の外力は 0 だから，

箱と小球のそれぞれが水平方向に変位しても系の重心は静止したままである。

そこで水平右方向に x 軸をとり，

系の重心，箱の重心，小球の重心の x 座標をそれぞれ x_{G}， x_{M}， x_{P} とすると，

重心の公式より， $x_{\mathrm{G}}=\dfrac{mx_{\mathrm{P}}+Mx_{\mathrm{M}}}{m+M}$， $x_{\mathrm{G}}+\Delta x_{\mathrm{G}}=\dfrac{m(x_{\mathrm{P}}+\Delta x_{\mathrm{P}})+M(x_{\mathrm{M}}+\Delta x_{\mathrm{M}})}{m+M}$

$$\therefore \Delta x_{\mathrm{G}}=(x_{\mathrm{G}}+\Delta x_{\mathrm{G}})-x_{\mathrm{G}}=\frac{m\Delta x_{\mathrm{P}}+M\Delta x_{\mathrm{M}}}{m+M}$$

$\Delta x_{\mathrm{G}}=0$ より， $m\Delta x_{\mathrm{P}}+M\Delta x_{\mathrm{M}}=0$　・・・①

また，箱から見た P の位置の x 方向の変化は $-l\sin\theta$ だから，

$$\{(x_{\mathrm{P}}+\Delta x_{\mathrm{P}})-(x_{\mathrm{M}}+\Delta x_{\mathrm{M}})\}-(x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{M}})=-l\,sin\,\theta$$

すなわち $\Delta x_{\mathrm{P}}-\Delta x_{\mathrm{M}}=-l\sin\theta$　$\therefore \Delta x_{P}=\Delta x_{M}-l\sin\theta$　・・・②

①，②より，

$$m(\Delta x_{M}-l\sin\theta)+M\Delta x_{M}=0$$

$$\therefore \Delta x_{M}=\frac{m\cdot l\sin\theta}{m+M}$$

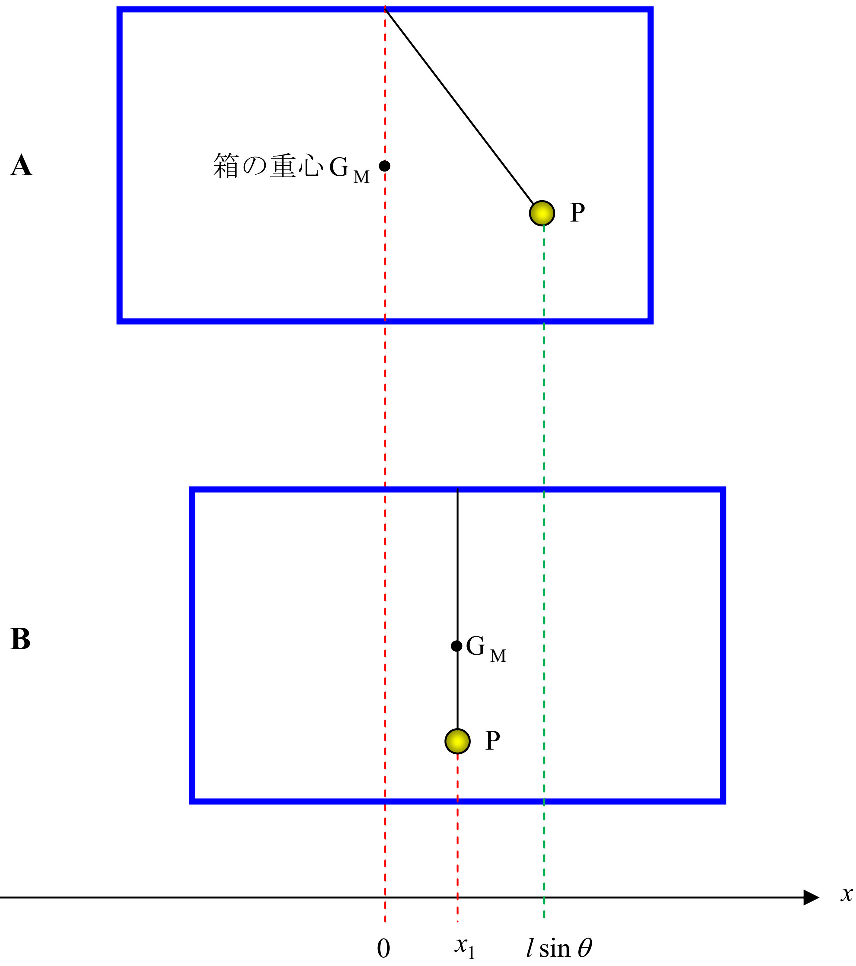
箱の変位と箱の重心の変位は同じだから，箱が動いた距離は $\dfrac{m\cdot l\sin\theta}{m+M}$ である。

結局，箱が動いた距離に x_{p} と x_{M} の項は関係しないことになる。

したがって，それらの重心の水平成分の取り方は自由である。

重心の水平成分の取り方が自由であることを利用して解く

下図のように箱の重心 G_M を糸が箱につながれた点を通る鉛直下向きの直線上にとり，小球 P の重心を小球の中心にとる。



箱と P から成る運動系の水平方向の運動量は 0 だから，

系の重心の x 成分は変化しない。

よって，上図のように x 軸をとると，

水平方向の重心の位置が A と B で一致するから，

$$\frac{ml\sin\theta + M\cdot 0}{m+M} = \frac{mx_1 + Mx_1}{m+M} \qquad \therefore x_1 = \frac{ml\sin\theta}{m+M}$$

重心

重心の公式

重心の位置：$\vec{r}_\mathrm{G} = \dfrac{\sum(m_i\vec{r}_i)}{\sum m_i}$

重心の速度：$\vec{v}_\mathrm{G} = \dfrac{\sum(m_i\vec{v}_i)}{\sum m_i}$

重心の加速度：$\vec{a}_\mathrm{G} = \dfrac{\sum(m_i\vec{a}_i)}{\sum m_i}$

運動量が保存されている運動系の重心から見た運動量

1．運動系の重心の速度は変化しない。

2．重心からみた運動系全体の運動量は 0 である。

重心から見た運動量で扱うと，運動を表す式が単純になるので便利である。

では，1,2 について解説する。

1：運動系の重心は等速度運動を続ける。

系の運動量が保存されているとき，系に外力が働いていない。

したがって，系の運動状態は変化しない。

系の運動状態が変化しないことと系の重心の速度が変化しないのは同値である。

具体的に証明すると，次のようになる。

衝突や分裂において，その直前と直後で速度の向きが変わることがふつうに起こる。

このような場合，x 軸と y 軸をとり，

それぞれの成分について運動量保存則の式を立てればよい。

重心の運動量も x 成分と y 成分に分け，

それぞれについて運動量保存則の式を立てればよい。

たとえば，

質量が m， M の 2 つの物体の衝突について，

質量 m の物体の衝突直前と衝突直後の速度の x 成分を v_x, v_x'

質量 M の物体の衝突直前と衝突直後の速度の x 成分を V_x, V_x'

とすると，

衝突直前の重心の速度の x 成分＝$\dfrac{mv_x + MV_x}{m+M}$

衝突直後の重心の速度の x 成分＝$\dfrac{mv_x'+MV_x'}{m+M}$

また，運動量保存則より， $mv_x + MV_x = mv_x'+MV_x'$

よって，

衝突直前の重心の速度の x 成分＝衝突直後の重心の速度の x 成分

これは， y 成分についても成り立つから，

重心の速度 $\vec{v}_{\mathrm{G}} = \dfrac{m\vec{v}+M\vec{V}}{m+M} = \dfrac{m\vec{v}'+M\vec{V}'}{m+M}$

ゆえに，

系の運動量が保存されるとき，衝突や分裂が起こっても重心の速度は変化しない。

2：重心からみた系の運動量は 0 である。

重心から見た衝突直前と直後の相対運動量は，

衝突直前

$$m(\vec{v}-\vec{v}_{\mathrm{G}})+M(\vec{V}-\vec{v}_{\mathrm{G}})=m\vec{v}+M\vec{V}-(m+M)\vec{v}_{\mathrm{G}}=0 \quad \because \vec{v}_{\mathrm{G}}=\frac{m\vec{v}+M\vec{V}}{m+M}$$

衝突直後

$$m(\vec{v}'-\vec{v}_{\mathrm{G}})+M(\vec{V}'-\vec{v}_{\mathrm{G}})=m\vec{v}'+M\vec{V}'-(m+M)\vec{v}_{\mathrm{G}}=0 \quad \because \vec{v}_{\mathrm{G}}=\frac{m\vec{v}'+M\vec{V}'}{m+M}$$

よって，

重心から見た運動量保存則の式は，

$$m(\vec{v}-\vec{v}_{\mathrm{G}})+M(\vec{V}-\vec{v}_{\mathrm{G}})=m(\vec{v}'-\vec{v}_{\mathrm{G}})+M(\vec{V}'-\vec{v}_{\mathrm{G}})=0$$

ゆえに，

運動系の運動量が保存されているとき，運動系の重心から見た運動量は 0 である。

重心の公式の導き方

重心の公式：$\vec{r}_{\mathrm{G}}=\dfrac{\sum(m_i\vec{r}_i)}{\sum m_i}$ の正しい導き方

重心の公式は，重心のまわりの各質点が受ける重力のモーメントのつり合いから導ける。
しかし，正しくは，次のようにする。
重心は正確には質量中心のことである。
そこで質量中心の求め方について，質点 1 と質点 2 から成る系で考えることにする。
質点 1 の質量を m_1，位置ベクトルを $\vec{r}_1$
質点 2 の質量を m_2，位置ベクトルを $\vec{r}_2$ とする。
質点 1 が質点 2 から受ける作用反作用の力を $\vec{F}$，
質点 1 が系外から受ける力を $\vec{f}_1$
質点 2 が質点 1 から受ける作用反作用の力を $-\vec{F}$，
質点 2 が系外から受ける力を $\vec{f}_2$ とすると，
それぞれの運動方程式は，それぞれ

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\vec{F}+\vec{f}_1$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=-\vec{F}+\vec{f}_2$$

この質点系全体に働く外力は，これら 2 式の両辺の和をとればよいから，

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$$

$$\therefore\frac{d^2(m_1\vec{r}_1)}{dt^2}+\frac{d^2(m_2\vec{r}_2)}{dt^2}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$$

$$\therefore\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}+m_2\vec{r}_2)=\vec{f}_1+\vec{f}_2\quad\cdots(\mathrm{a})$$

一方，質点系の重心を $\vec{r}_{\mathrm{G}}$ とすると，
質点系の質量は m_1+m_2 だから，
重心の運動方程式は，

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$$

$$\therefore\frac{d^2}{dt^2}\{(m_1+m_2)\vec{r}_{\mathrm{G}}\}=\vec{f}_1+\vec{f}_2\quad\cdots(\mathrm{b})$$

(a)，(b) より，

$$(m_1+m_2)\vec{r}_{\mathrm{G}}=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2$$

よって，

$$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

これは，質点が 3 個以上の系でも成り立つので，

質量中心 $\vec{r}_{\mathrm{G}}$ は，一般に，$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \dfrac{\sum\left(m_i\vec{r}_i\right)}{\sum m_i}$ と表される。