19. 保存則

(1)

運動量保存則の問題

物体系にはたらく外力がつり合っており且つ静止しているから，

この物体系の運動量は 0 の状態で保存されている。

カエルがとび上がるとき皿とカエルの間に生じる瞬間的な大きな力は

作用反作用の力だから，その瞬間においても運動量が保存される。

よって，

$$0 = M\vec{V} + (2m + M)\vec{v}$$

$$\therefore \vec{v} = -\frac{M}{2m + M}\vec{V}$$

$$\therefore v = \frac{M}{2m + M}V$$

補足

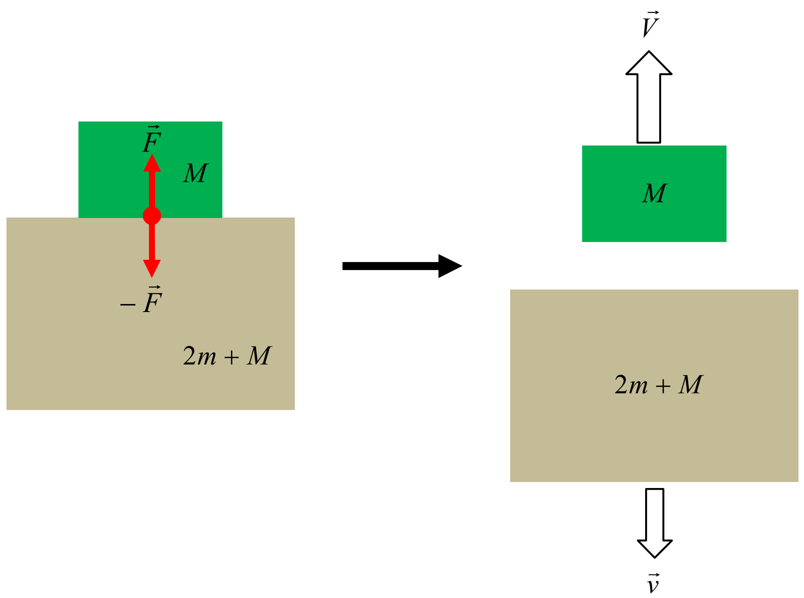
$M\vec{V} - 0 = -\vec{F}\Delta t$　・・・①

$(2m + M)\vec{v} - 0 = \vec{F}\Delta t$　・・・②

①＋②より，

$M\vec{V} + (2m + M)\vec{v} = 0$

デフォルメすると次図のようになる。



(2)

力学的エネルギー保存則の問題

(3)

相対運動の問題

カエルが皿 A から離れる距離に関する問題だから，相対運動の問題である。

したがって，扱うのは相対加速度，相対速度，相対変位である。

鉛直上向きを正とすると，

カエルの運動方程式

$M\alpha = -Mg$ より，$\alpha = -g$ ・・・③

皿 A の運動方程式

糸の張力を T とすると，

皿 A の運動方程式：$m\beta = T - mg$ ・・・④

皿 B の運動方程式：$-(m+M)\beta = T - (m+M)g$ ・・・⑤

④－⑤より，

$(2m+M)\beta = Mg$

$\therefore \beta = \dfrac{M}{2m+M}g$ ・・・⑥

皿 A から見たカエルの加速度

③－⑥より，

$$a_r = \alpha - \beta = -g - \frac{M}{2m+M}g = -\frac{2(m+M)}{2m+M}g \quad ・・・⑦$$

皿 A から見たカエルの初速度

$$V_{r0} = \vec{V} - \vec{v} = V - \left(-\frac{M}{2m+M}\right)\cdot V = \frac{2(m+M)}{2m+M}V \quad ・・・⑧$$

カエルが皿 A から見て最も離れたとき，皿 A から見たカエルの速度

0 ・・・⑨

カエルが皿 A から見て最も離れた距離を h' とすると，⑦，⑧，⑨より，

$$0^2 - \left\{\frac{2(m+M)}{2m+M}V\right\}^2 = 2\left\{-\frac{2(m+M)}{2m+M}g\right\}h'$$

$$\therefore h' = \frac{m+M}{2m+M}\cdot\frac{V^2}{g}$$

(2)より，$V = \sqrt{\dfrac{(2m+M)gh}{m+M}}$ だから，

$$h' = \frac{m+M}{2m+M}\cdot\frac{V^2}{g} = \frac{m+M}{2m+M}\cdot\frac{2m+M}{m+M}h = h$$ よって，1 倍

補足

重心の加速度を求めると，

(3)より，

$$a_{\mathrm{G}}=\frac{M\cdot(-g)+(2m+M)\cdot\dfrac{M}{2m+M}g}{M+(2m+M)}=\frac{-Mg+Mg}{2(m+M)}=0$$

よって，

重心は等速度運動をする。

重心の速度 $v_{\mathrm{G}}=\dfrac{M\vec{V}'+(2m+M)\vec{v}'}{M+(2m+M)}=\dfrac{M\vec{V}'+(2m+M)\vec{v}'}{2(m+M)}=$ 一定

より，分子 $M\vec{V}'+(2m+M)\vec{v}'$ は一定である。

$M\vec{V}'+(2m+M)\vec{v}'$ は系全体の運動量を表すから，これが一定ということは，

カエルが皿を離れた後も系全体の運動量は 0 のままである。

よって，カエルが床に対して最高点に達した時，すなわちその速度が 0 になったとき，

皿 A の速度も 0 になる。