

31. 円運動・単振動

(3)

4. 単振り子の運動方程式と単振動の式

まずは、用語の定義から

単振り子

軽い糸の上端を固定して下端におもりをつるし、これを鉛直面内で振動させるもの

振り子

定点のまわりに振動する物体

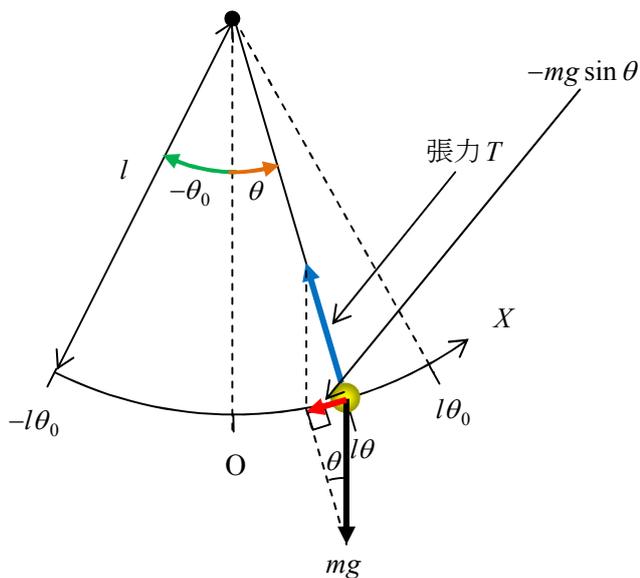
では、本題

質量 m の振り子に働く外力のつり合いの位置を原点 O とし、

X 軸を振り子の軌道（円弧）の反時計まわりの向きにとる。

また、振り子の振幅の大きさを $l\theta_0$ とし、 θ_0 は十分小さいものとする ($\theta_0 \approx 0$)。

ただし、図は、見やすくするため θ_0 をわざと大きくとった。



単振り子の運動方程式

単振り子は軌道（円弧）の接線方向の外力により速度を変化させ単振動運動をする。

糸の張力 T の円弧の接線方向の分力は 0 だから、

張力 T は単振り子の運動方程式の外力に含まれない。

単振り子の単振動運動の原動力となる外力は、重力の円弧の接線成分 $-mg \sin \theta$ である。

よって、振り子の単振動の運動方程式は、

$$ma = -mg \sin \theta$$

ここで、 $|\theta| < \theta_0 \approx 0$ だから、 $\sin \theta = \theta$ としてよい。

$$\therefore ma = -mg\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また、振り子の変位 } X = l\theta \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} ma = -mg \cdot \frac{X}{l} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore ma = -\frac{mg}{l} X \quad \dots \textcircled{4}$$

$\frac{mg}{l}$ は定数だから、運動方程式③は単振動を表す運動方程式である。

単振動の式

振り子の振幅の大きさは $l\theta_0$ であり、初期位相を α 、角振動数を $\omega (> 0)$ とすると、

$X = l\theta_0 \sin(\omega t + \alpha)$ と表せる。

$$\text{振り子の速度 } v = \frac{dX}{dt} = l\theta_0 \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{振り子の加速度 } a = \frac{dv}{dt} = -l\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{5}$$

単振動の式と単振動の運動方程式との融合

$$\textcircled{4} \text{ より、} a = -\frac{g}{l} X$$

$$\textcircled{5} \text{ より、} a = -\omega^2 X$$

$$\text{よって、} -\omega^2 X = -\frac{g}{l} X \text{ ならば、} \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

以上より、単振り子は振幅 $l\theta_0$ 、周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ の単振動運動を行う。

補足

単振動の運動方程式の一般形 $ma = -KX$ と $ma = -\frac{mg}{l} X$ を対応させると、 $K = \frac{mg}{l}$

これを公式 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$ に代入すると、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ が得られる。

(4)

地上で静止している観測者（地上の観測者）が見た場合

点 A で小球 P は電車に対して静止するから、電車に対する相対速度は 0 である。

すなわち小球 P の速度の水平成分と電車の速度が等しくなる。

そこで、このときの両者の速度を v_x とおく。

また、電車の速度の鉛直成分は 0 だから、

点 A で小球 P は電車に対して静止するという事は、

点 A の小球の速度の鉛直成分が 0 であることを意味する。

したがって、地上の観測者が見るが小球 P の運動は水平投射となる。

鉛直方向は自由落下だから、床に衝突するまでの時間を t ($t > 0$) とすると、

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ より, } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

床に衝突するときの小球 P の電車に対する相対速度の大きさ

相対速度の大きさを u 、その水平成分を u_x 、その鉛直成分を u_y とする。

u_x について

小球の速度の水平成分は等速度運動より、 v_x

電車は水平方向に等加速度 $g \tan \frac{\theta}{2}$ で運動するから $v_x + g \tan \frac{\theta}{2} \cdot t$

よって、 $u_x = v_x - \left(v_x + g \tan \frac{\theta}{2} \cdot t \right) = -g \tan \frac{\theta}{2} \cdot t$

これと $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ より、 $u_x = -g \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \tan \frac{\theta}{2}$

u_y について

床に衝突するときの小球 P の鉛直成分は自由落下だから、 gt

電車の速度の鉛直成分は 0

よって、 $u_y = gt - 0 = gt$

これと $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ より、 $u_y = \sqrt{2gh}$

よって、

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2gh \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2gh} = \sqrt{2gh \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2gh}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$