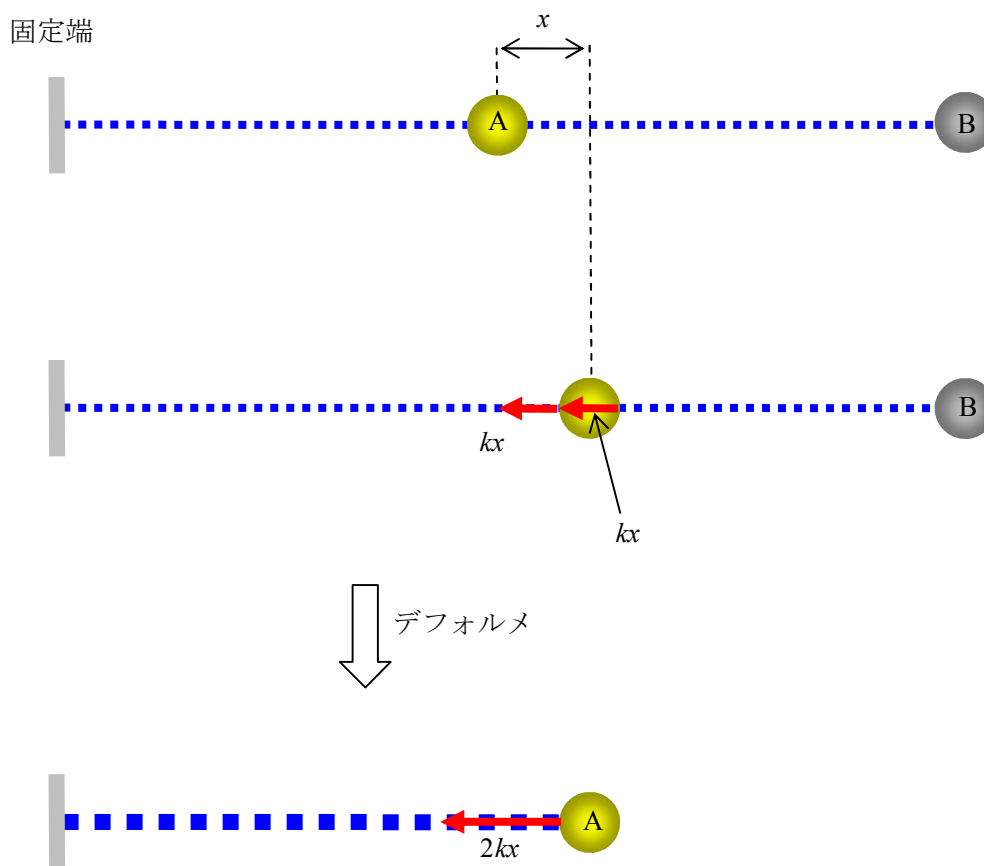


36. 単振動

(2)



A の単振動運動は、自然長 l 、ばね定数 $2k$ のばねに結ばれた場合と同じ

よって、

A の振動の周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$. . . (答)

(3)

AB 間のばねを取り除き、

同じ向きに等しい大きさ d の変位を与えてから同時に静かに放した場合で考えると、A と B は同振幅 (d)、同位相、同周期 $\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$ の単振動運動を行う。したがって、AB 間の距離は l のままである。

具体的には、

左端の固定端を 0 とする x 軸を右向きにとり、A の位置を x_A 、B の位置を x_B 、A と B を同時に放した時刻を $t=0$ とすると、

$$x_A = l + d \cos \omega t, \quad x_B = 2l + d \cos \omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \text{より,}$$

$$AB = x_B - x_A = l$$

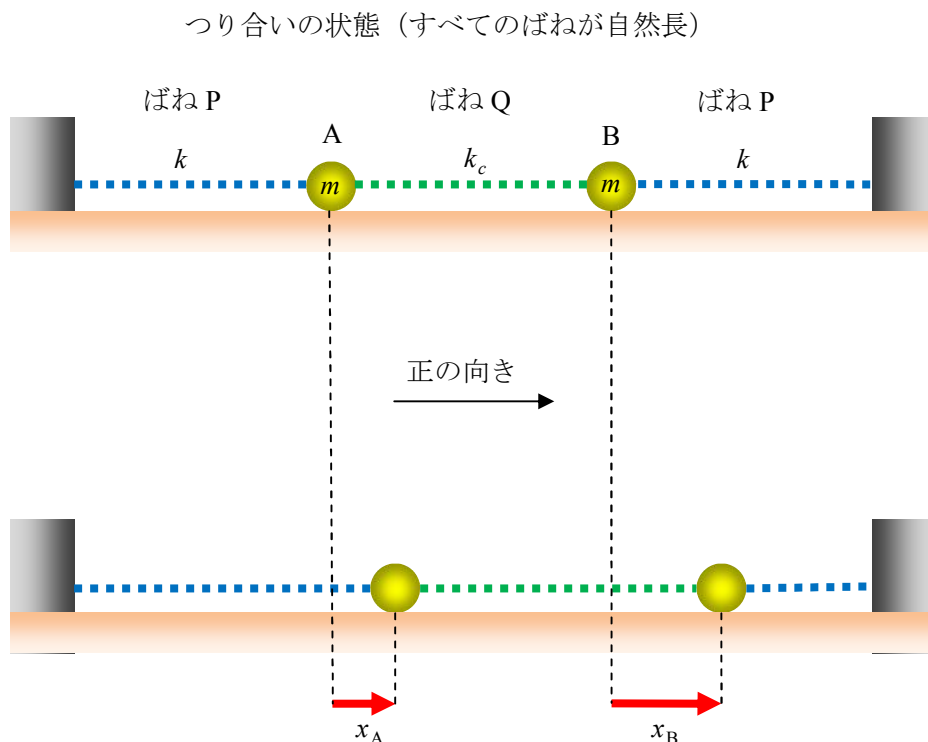
つまり、A と B をばねで結んだところで、そのばねから受ける外力は 0 、

すなわち AB 間のばねは単振動に影響を及ぼさない。

よって、

$$A \text{ の振動の周期は } 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \dots \text{ (答)}$$

連結振動



質量 m の等しい 2 つの球 A と B が，図のように，ばね P (ばね定数 k) とばね Q (ばね定数 k_c) の 3 個のばねに直線状に結ばれて，摩擦のない水平面上に置かれている。
 また，A と B の (変位，速度，加速度) をそれぞれ (x_A, v_A, a_A) ， (x_B, v_B, a_B) とする。

A の運動方程式

$$ma_A = -kx_A + k_c(x_B - x_A) \quad \dots \textcircled{1}$$

補足

$x_A > 0$ のとき，ばね P は自然長より長いから，ばね P から受ける力は負
 逆に $x_A < 0$ のときは正

$x_B - x_A > 0$ のとき，ばね Q は自然長より長いから，ばね Q から受ける力は正
 逆に， $x_B - x_A < 0$ のときは負

B の運動方程式

$$ma_B = -kx_B - k_c(x_B - x_A) \quad \dots \textcircled{2}$$

①+②

$$m(a_A + a_B) = -k(x_A + x_B) \text{ より, } m \frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) = -k(x_A + x_B)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) = -\frac{k}{m}(x_A + x_B)$$

これは A と B の変位の和 $x_A + x_B$ も、角振動数を ω_1 とすると、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ の単振動であることを示している。}$$

したがって、初期位相を φ_1 、振幅を A_1 とすると、

$$x_A + x_B = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \dots \textcircled{3}$$

または、周期を T_1 とすると、

$$x_A + x_B = A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \varphi_1\right)$$

と表せる。

①-②

$$m(a_A - a_B) = -k(x_A - x_B) + 2k_c(x_B - x_A)$$

$$\therefore m(a_A - a_B) = -(k + 2k_c)(x_A - x_B)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) = -\frac{k + 2k_c}{m}(x_A - x_B)$$

これは A と B の変位の差も、角振動数を ω_2 とすると、

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}} \text{ の単振動であることを示している。}$$

したがって、初期位相を φ_2 、振幅を A_2 とすると、

$$x_A - x_B = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \dots \textcircled{4}$$

または、周期を T_2 とすると、

$$x_A - x_B = A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \varphi_2\right)$$

と表せる。

以上より,

変位について

A と B の変位の和

$$x_A + x_B = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

A と B の変位の差

$$x_A - x_B = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

また, これら 2 つの式より,

$$x_A = \frac{1}{2} \{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$x_B = \frac{1}{2} \{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

速度について

A と B の速度の和

$$v_A + v_B = \omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

A と B の速度の差

$$v_A - v_B = \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

また, これら 2 つの式より,

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = \frac{1}{2} \{\omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = \frac{1}{2} \{\omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

加速度について

A と B の加速度の和

$$a_A + a_B = -\omega_1^2 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = -\omega_1^2 (x_A + x_B)$$

A と B の加速度の差

$$a_A - a_B = -\omega_2^2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = -\omega_2^2 (x_A - x_B)$$

また, これら 2 つの式より,

$$a_A = \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -\frac{1}{2} \{\omega_1^2 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_2^2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$a_B = \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\frac{1}{2} \{\omega_1^2 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2^2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

ただし, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}$

A₁ と A₂ について

$t=0$ のとき $x_A = d_A$, $x_B = d_B$ の位置で A と B を放し, 単振動運動を開始したとすると,
このとき $v_A = v_B = 0$ より, 運動エネルギーは 0 だから,
単振動の力学的エネルギー保存則より,
 $|d_A + d_B| = A_1$, $|d_A - d_B| = A_2$ が成り立つ。

実際,

$t=0$ のとき

$$x_A = d_A, \quad x_B = d_B \text{ より,}$$

$$d_A + d_B = A_1 \sin \varphi_1$$

$$d_A - d_B = A_2 \sin \varphi_2$$

が成り立つ。

また,

$$v_A = v_B = 0 \text{ より,}$$

$$0 + 0 = \omega_1 A_1 \cos \varphi_1, \quad 0 - 0 = \omega_2 A_2 \cos \varphi_2$$

$$\therefore A_1 \cos \varphi_1 = A_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (\because \omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0)$$

ここで,

$d_A \neq \pm d_B$ のとき

$$d_A + d_B = A_1 \sin \varphi_1 \neq 0, \quad d_A - d_B = A_2 \sin \varphi_2 \neq 0 \text{ より,}$$

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0$$

$$\text{これと } A_1 \cos \varphi_1 = A_2 \cos \varphi_2 = 0 \text{ より, } \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = 0$$

$$\therefore \sin \varphi_1 = \pm 1, \quad \sin \varphi_2 = \pm 1$$

$$\therefore d_A + d_B = \pm A_1, \quad d_A - d_B = \pm A_2$$

$$\therefore |d_A + d_B| = A_1, \quad |d_A - d_B| = A_2$$

$d_A = d_B$ のとき

$$d_A + d_B = A_1 \sin \varphi_1 \neq 0, \quad d_A - d_B = A_2 \sin \varphi_2 = 0$$

$$d_A + d_B = A_1 \sin \varphi_1 \text{ については,}$$

上と同様にして, $|d_A + d_B| = A_1$ が成り立つことがわかる。

$$d_A - d_B = A_2 \sin \varphi_2 = 0 \text{ については,}$$

$$A_2 = 0 \text{ または } \sin \varphi_2 = 0$$

$$A_2 = 0 \text{ とすると, } |d_A - d_B| = A_2 \text{ が成り立つ。}$$

$$\sin \varphi_2 = 0 \text{ とすると, } \cos \varphi_2 = \pm 1$$

$$\text{これと } A_2 \cos \varphi_2 = 0 \text{ より, } A_2 = 0$$

よって, $|d_A - d_B| = A_2$ が成り立つ。

$$\therefore |d_A + d_B| = A_1, \quad |d_A - d_B| = A_2$$

同様に, $d_A = -d_B$ のときも $|d_A + d_B| = A_1$, $|d_A - d_B| = A_2$ が成り立つ。

問題 36 における A と B の振動の式

A と B の変位を表す式

$$x_A = \frac{1}{2} \{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$x_B = \frac{1}{2} \{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (\because k_c = k)$$

(1) の場合の A と B の変位を表す式

$$A_1 = \frac{d}{2} + d = \frac{3}{2}d, \quad A_2 = \left| \frac{d}{2} - d \right| = \frac{d}{2} \text{ より,}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{d}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \right\} = \frac{3}{4}d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{d}{4} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{d}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \right\} = \frac{3}{4}d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{d}{4} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

また, $t=0$ のとき, $x_A = \frac{d}{2}$, $x_B = d$ だから,

$$\frac{d}{2} = \frac{3}{4}d \sin \varphi_1 + \frac{d}{4} \sin \varphi_2, \quad d = \frac{3}{4}d \sin \varphi_1 - \frac{d}{4} \sin \varphi_2$$

よって,

$$3 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = 2, \quad 3 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 4$$

$$\therefore \sin \varphi_1 = 1, \quad \sin \varphi_2 = -1$$

よって, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ とすると,

$$x_A = \frac{3}{4}d \cos \omega_1 t - \frac{d}{4} \cos \omega_2 t$$

$$x_B = \frac{3}{4}d \cos \omega_1 t + \frac{d}{4} \cos \omega_2 t$$

$$x_A + x_B = \frac{3}{2}d \cos \omega_1 t$$

$$x_A - x_B = -\frac{d}{2} \cos \omega_2 t$$

(2)の場合の A と B のの変位を表す式

$$A_1 = d + 0 = d, \quad A_2 = d - 0 = d \text{ より,}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \{d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$x_B = \frac{1}{2} \{d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

また, $t=0$ のとき, $x_A = d$, $x_B = 0$ だから,

$$d = \frac{1}{2} d \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} d \sin \varphi_2, \quad 0 = \frac{1}{2} d \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} d \sin \varphi_2$$

$$\therefore \sin \varphi_1 = 1, \quad \sin \varphi_2 = 1$$

よつて, $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ とすると,

$$x_A = \frac{1}{2} d (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = d \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

$$x_B = \frac{1}{2} d (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = d \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

$$x_A + x_B = d \cos \omega_1 t$$

$$x_A - x_B = d \cos \omega_2 t$$

(3)の場合の A と B の変位を表す式

$$A_1 = d + d = 2d, \quad A_2 = d - d = 0 \text{ より,}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \{2d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + 0\} = d \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_B = \frac{1}{2} \{2d \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - 0\} = d \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

また, $t=0$ のとき, $x_A = x_B = d$ だから, $d = d \sin \varphi_1$

$$\therefore \sin \varphi_1 = 1$$

よって, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ とすると,

$$x_A = x_B = d \cos \omega_1 t$$

$$\text{ただし, } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

よって, A と B は AB 間の距離 l を保ったまま, 周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ の単振動運動を行う。

(4)の場合の A と B の変位を表す式

$$A_1 = d + (-d) = 0, \quad A_2 = d - (-d) = 2d \text{ より,}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \{0 + 2d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\} = d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_B = \frac{1}{2} \{0 - 2d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\} = -d \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

また, $t=0$ のとき, $x_A = d$, $x_B = -d$ だから, $d = d \sin \varphi_2$, $-d = -d \sin \varphi_2$

$$\therefore \sin \varphi_2 = 1$$

よって, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ とすると,

$$x_A = d \cos \omega_2 t, \quad x_B = -d \cos \omega_2 t$$

$$\text{ただし, } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

よって, 互いに A と B は逆位相の関係で, 周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$ の単振動運動を行う。

ばねのつなぎ方と合成ばね定数

弾性力

ばねなど弾性体が外力により変形すると、弾性体には元に戻ろうとする力が生じる。

この力を「弾性力」または単に「弾力」という。

ばねの弾性力の大きさ（フックの法則）

ばねの弾性力の大きさ $|F|$ は、

ばねの自然長からの変位の大きさ（伸びや縮みの長さ） $|x|$ に比例し、

比例定数を k とすると、

$$|F| = k|x| \quad (\text{比例定数 } k \text{ をばね定数という})$$

と表される。

これをフックの法則という。

ちなみにフックはコルクの軽さと強さに興味をもち、自ら作った顕微鏡でコルクを観察し、発見した空洞を cell（細胞）と名付けたことで、どの高校生物教科書にも取り上げられている。

弾性力 F と変位 x の関係式

ばねが伸びたときの弾性力の向きは縮む向き、

ばねが縮んだときの弾性力の向きは伸びる向き

より、

変位 x と弾性力 F の向きは互いに逆向きである。

よって、

弾性力と変位の関係式は、 $F = -kx$ と表される。

ばねのつなぎ方と合成ばね定数

複数つないだばねを 1 つのばねと見なしたときのばね定数を合成ばね定数という。

ばねを直列につないだときの合成ばね定数

ばね定数が k_1 （青）、 k_2 （茶）、 k_3 （赤）のばねを直列につなぎ（図 1 上段）、

大きさ F の外力で引くと、それぞれのばねの伸びが x_1 、 x_2 、 x_3 となって力がつり合ったとすると（図 1 中段）、各接触点では作用反作用の力により力の大きさがつり合うから、

$$F = k_3 x_3, \quad k_3 x_3 = k_2 x_2, \quad k_2 x_2 = k_1 x_1, \quad k_1 x_1 = F' \text{ より、}$$

$$F = k_3 x_3 = k_2 x_2 = k_1 x_1 = F'$$

$$\text{よって、} x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad x_3 = \frac{F}{k_3} \quad \dots \textcircled{1}$$

次に、これを1本のばねとみなし (図1下段)、そのばね定数を k_T とすると、
ばねの伸びは $x_1 + x_2 + x_3$ だから、

$$k_T(x_1 + x_2 + x_3) = F \text{ より、}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{F}{k_T} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} = \frac{F}{k_T}$$

よって、

$$\frac{1}{k_T} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

これを一般化すると、

$$\frac{1}{k_T} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

とくに、ばね定数が同じばねを n 本直列につないだ場合、ばね定数を k とすると、

$$\frac{1}{k_T} = \frac{n}{k} \text{ より、 } k_T = \frac{k}{n}$$

つまり、直列につなぐばねの数を 2,3,4,... 本としていくと、

合成ばね定数 k_T は、 $\frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \dots$ と本数の逆数に比例して小さくなっていく。

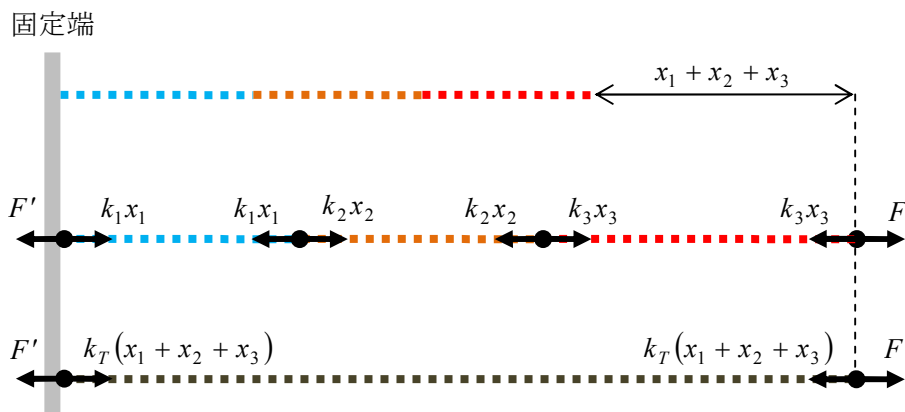


図1

ばねを並列につないだときの合成ばね定数

ばね定数が k_1 (青), k_2 (茶), k_3 (赤) のばねを束ねて, 大きさ F の外力で引くと, 伸びが x のとき, 力がつり合ったとする (図2)。

このとき,

$$k_1x + k_2x + k_3x = F \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。

束ねたばねを1本のばねと見なし, そのばね定数を k_T とすると,

$$k_Tx = F \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④より,

$$k_Tx = k_1x + k_2x + k_3x$$

よって,

$$k_T = k_1 + k_2 + k_3$$

これを一般化すると,

$$k_T = \sum_{i=1} k_i$$

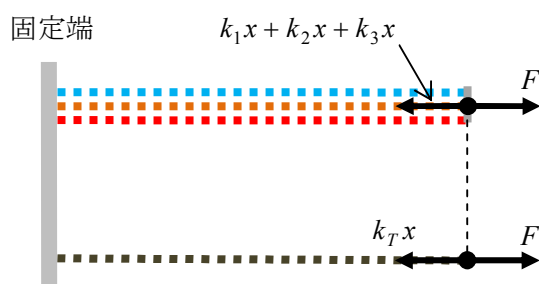


図 2

間に物体をはさんだときの合成ばね定数

自然長の状態の2つのばねが，間に物体をはさんで，つながっている（図3-1）。

（ばね定数： k_1 （青）， k_2 （茶））

この物体をばねの向きに大きさ F の外力で引いたときの変位の大きさを x とする（図3-2）。

このときの力のつり合いは，

$$k_1x + k_2x = F \quad \dots \textcircled{5}$$

このばねを1本のばねと見なし，そのばね定数 k_T とすると（図3-3あるいは図3-4），

$$k_Tx = F \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤，⑥より，

$$k_Tx = k_1x + k_2x$$

よって，

$$k_T = k_1 + k_2$$

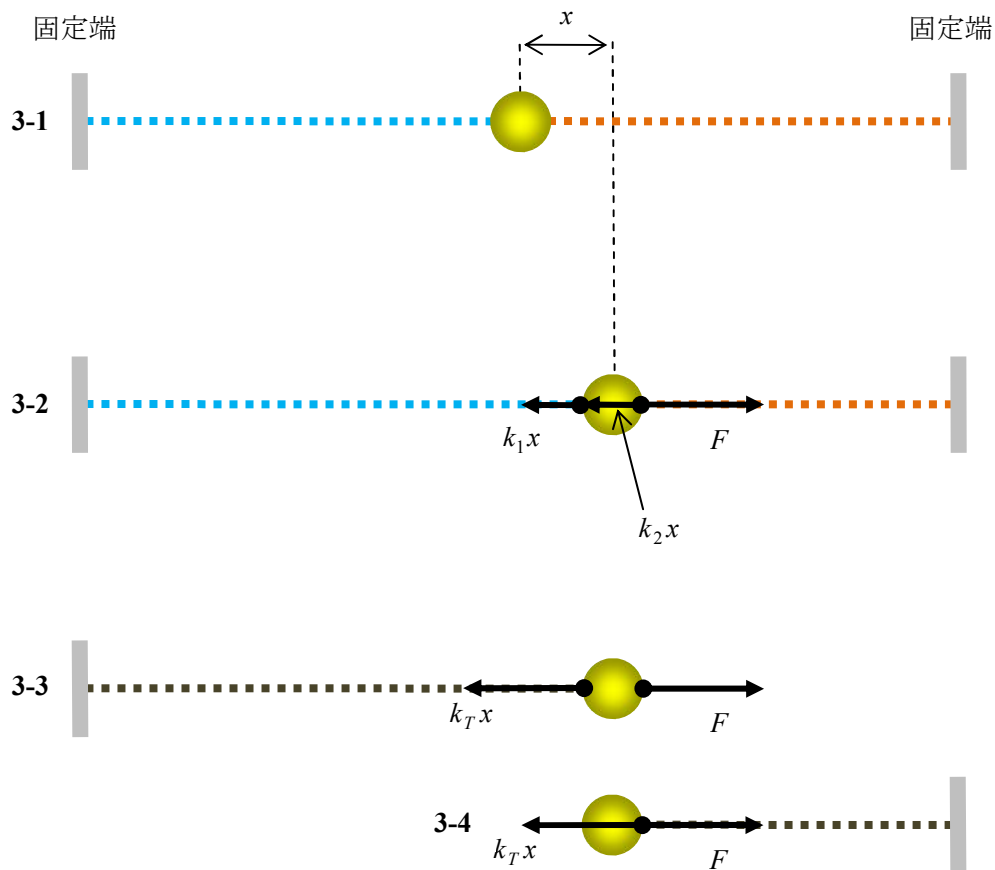


図 3

図3-1は単振動問題でよく見かけるタイプの図であるが，

図3-3あるいは図3-4のようにデフォルメするとわかりやすくなる。