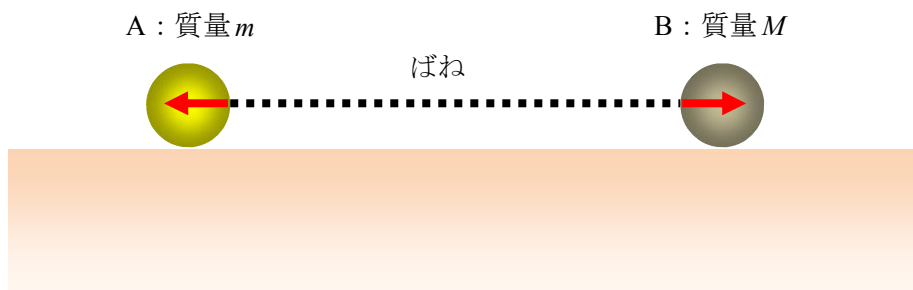


37. 単振動

(2)



たとえば、ばねが自然長より短くなったとき、

A と B それぞれはばねから大きさが同じで向きが逆の弾性力を受ける。

ばねが自然長より長くなったときも同じである。

また、自然長のときはばねから受ける弾性力は 0 である。

以上より、A がばねから受ける力積と B がばねから受ける力積の和は常に 0 である。

したがって、A と B からなる系の水平方向の運動量は常に保存され、

保存される系の運動量は、C との衝突直後の A の速度が v_0 、B の速度が 0 だから、

$mv_0 + m \cdot 0 = mv_0$ である。

よって、 $mv_A + mv_B = mv_0$

ゆえに、 $mv_G = \frac{mv_A + mv_B}{m + m} = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$

(3) 別解

$mv_A + mv_B = mv_0$ より、 $v_A + v_B = v_0$ ……①

AB 間の距離が最大または最小となるとき、A (B) から見ると B (A) が静止する。

すなわち A から見た B の速度が 0 になる。

よって、 $v_A = v_B$ ……②

①、②より、 $v_A = v_B = \frac{v_0}{2}$

このときのばねの自然長からの伸びを x とすると、

衝突直後と AB 間の距離が最大または最小になったときの力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore x = \pm v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

ゆえに、 $l_1 = l_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}$ 、 $l_2 = l_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}$

(4)

重心から見た A の運動は単振動である。

右方向を正とすると、この単振動について、

振幅

$$(3)より、A の変位の最大値、すなわち振幅は $\frac{l_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}}{2} - \frac{l_0}{2} = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \dots \textcircled{1}$$$

角振動数

G から見ると A はばね定数 $2k$ のばねにつながれているから、

G から見た A のつり合いの位置（自然長）からの変位を x_{GA} とすると、

A の運動方程式は $ma = -2kx_{GA}$

$$よって、\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \dots \textcircled{2}$$

G から見た A の変位の式

$t=0$ で振動中心を右向きに通過するから、 $t=0$ の位相（初期位相）は 0

$$\text{これと}\textcircled{1}, \textcircled{2}\text{より、} x_{GA} = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t$$

G から見た A の速度

$$\begin{aligned} v_{GA} &= \frac{dx_{GA}}{dt} \\ &= \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sqrt{\frac{2k}{m}} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \\ &= \frac{v_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \end{aligned}$$

水平面上から見た A の速度

$$\begin{aligned} v_A &= V_G + v_{GA} \\ &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \\ &= \frac{v_0}{2} \left(1 + \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

補足

この方法に慣れれば、

$t=0$ で振動中心を右向きに G からみて最大速度 $\frac{v_0}{2}$ で通過するから、 $v_{GA} = \frac{v_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t$

とすぐ求められるようになる。

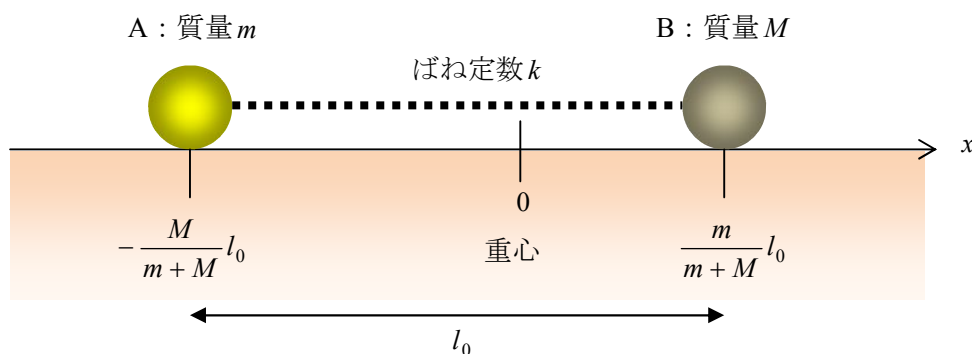
ばねにつながれた 2 物体の重心から見た運動

質量 m の物体 A と質量 M の物体 B が自然長 l_0 、ばね定数 k のばねにつながれているとする。
尚、床は滑らかである。

また、重心の座標を 0 とする x 軸を右方向にとる。

自然長のとき

物体 A と物体 B の座標



重心からの物体の距離の比は物体の質量の逆比と等しいから、

$$A \text{ と重心の距離} : B \text{ と重心の距離} = \frac{1}{m} : \frac{1}{M} = M : m$$

よって、重心の x 座標を 0 とすると、

$$\text{自然長のときの A と B の座標はそれぞれ } -\frac{M}{m+M}l_0, \frac{m}{m+M}l_0$$

重心から見たばね定数

$$\text{重心から見たときの A 側のばね定数を } k_A \text{ とすると, } k_A = \frac{l_0}{\frac{M}{m+M}l_0} k = \frac{m+M}{M} k$$

$$\text{重心から見たときの B 側のばね定数を } k_B \text{ とすると, } k_B = \frac{l_0}{\frac{m}{m+M}l_0} k = \frac{m+M}{m} k$$

重心から見た単振動運動の周期

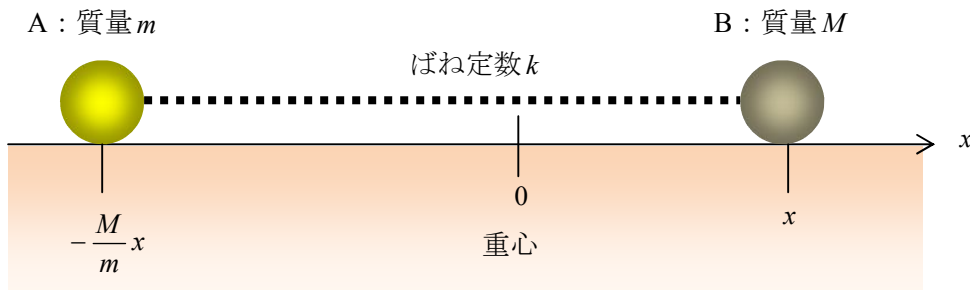
$$A \text{ の単振動運動の周期を } T_A \text{ とすると, } T_A = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$$

$$B \text{ の単振動運動の周期を } T_B \text{ とすると, } T_B = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_B}} = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$$

$$\therefore T_A = T_B$$

重心から見た A と B の運動方程式

B の変位が x のときの A と B の運動方程式



重心からの物体の距離の比は物体の質量の逆比と等しいから、

$$A \text{ と重心の距離} : B \text{ と重心の距離} = \frac{1}{m} : \frac{1}{M} = M : m$$

よって、B の座標を x とすると、A の座標は、 $-\frac{M}{m}x$

このときの A の加速度を a_A 、B の加速度を a_B とすると、
それぞれの運動方程式は、

$$ma_A = -k_A \left\{ -\frac{M}{m}x - \left(-\frac{M}{m+M}l_0 \right) \right\} \dots \textcircled{1}$$

補足： $F = -kx$ となる理由

$$|F| = k_A \left| -\frac{M}{m}x - \left(-\frac{M}{m+M}l_0 \right) \right|$$

A が自然長の位置より左にあるとき、

$$\text{すなわち } -\frac{M}{m}x - \left(-\frac{M}{m+M}l_0 \right) < 0 \text{ のとき, } F > 0 \text{ (力は正の向き)}$$

A が自然長の位置より右にあるとき、

$$\text{すなわち } -\frac{M}{m}x - \left(-\frac{M}{m+M}l_0 \right) > 0 \text{ のとき, } F < 0 \text{ (力は負の向き)}$$

より、

$$F = -k_A \left\{ -\frac{M}{m}x - \left(-\frac{M}{m+M}l_0 \right) \right\}$$

$$Ma_B = -k_B \left(x - \frac{m}{m+M}l_0 \right) \dots \textcircled{2}$$

①、②に $k_A = \frac{m+M}{M}k$ 、 $k_B = \frac{m+M}{m}k$ を代入し整理すると、

$$ma_A = -\frac{m+M}{M}k\left(-\frac{M}{m}x + \frac{M}{m+M}l_0\right)$$

$$Ma_B = -\frac{m+M}{m}k\left(x - \frac{m}{m+M}l_0\right)$$

よって,

$$mMa_A = -(m+M)k\left(-\frac{M}{m}x + \frac{M}{m+M}l_0\right) \dots \textcircled{3}$$

$$mMa_B = -(m+M)k\left(x - \frac{m}{m+M}l_0\right) \dots \textcircled{4}$$

A から見た B の運動方程式

④-③より,

$$mM(a_B - a_A) = -(m+M)k\left\{\left(1 + \frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$$

ここで,

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right)x = x + \frac{M}{m}x \text{ の } x \text{ は重心と B の距離, } \frac{M}{m}x \text{ は重心と A の距離だから,}$$

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right)x \text{ は AB 間の距離, すなわちばねの全長である。}$$

したがって, $\left\{\left(1 + \frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$ はばね全体の伸びを表す。

ゆえに, $-k\left\{\left(1 + \frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$ はばね全体の弾性力である。

$$\text{これと } \frac{mM}{m+M}(a_B - a_A) = -k\left\{\left(1 + \frac{M}{m}\right)x - l_0\right\} \text{ より,}$$

A から B を見ると

$$\text{質量 } \frac{mM}{m+M} \text{ の物体が周期 } 2\pi\sqrt{\frac{mM}{m+M} \frac{1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}} \text{ で単振動運動していることになる。}$$

この相対運動の運動方程式から得られた質量 $\frac{mM}{m+M}$ を換算質量と呼ぶ。

重心の速度

はじめ静止していた物体 A と物体 B の単振動運動の場合

物体 A と物体 B がそれぞれ弾性力 F_0 と $-F_0$ を短時間受け、

それぞれの速度が v_A と v_B になったとすると、

それぞれの運動量変化は、

$$mv_A - 0 = F\Delta t \quad \dots \textcircled{5}$$

$$Mv_B - 0 = -F\Delta t \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤+⑥より、

$$mv_A + Mv_B = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

このように、物体 A が受ける力積と物体 B が受ける力積は打ち消し合う関係にあるので、

任意の時刻における物体 A と物体 B の運動量変化の和は 0 である。

つまり常に⑦のような関係式が成り立つ。

一方、重心の速度を v_G とすると、

$$v_G = \frac{mv_A + Mv_B}{m + M} \text{ であり、これと⑦の関係式が常に成り立つことより、 } v_G = 0$$

したがって、

はじめ静止していた物体 A と物体 B が単振動運動する場合、重心は静止し続ける。

物体 A が初速度 v_0 で運動を開始した場合

物体 A と物体 B がそれぞれ弾性力 F_0 と $-F_0$ を短時間受け、

それぞれの速度が v_A と v_B になったとすると、

それぞれの運動量変化は、

$$mv_A - mv_0 = F\Delta t \quad \dots \textcircled{8}$$

$$Mv_B - 0 = -F\Delta t \quad \dots \textcircled{9}$$

⑧+⑨より、

$$mv_A + Mv_B = mv_0 \quad \dots \textcircled{10}$$

このような関係式は、上述した理由により、常に成り立つ。

一方、重心の速度を v_G とすると、

$$v_G = \frac{mv_A + Mv_B}{m + M}$$

$$\text{これと⑩のような関係式が常に成り立つことより、 } v_G = \frac{m}{m + M} v_0$$

したがって、

物体 A が初速度 v_0 で運動を開始した場合、重心は $\frac{m}{m + M} v_0$ の等速度運動をす