

53. ドップラー効果

(2)

A と M の相対的な位置関係は変わらないから、

A から出た音を M が観測するのにかかる時間は、常に $\frac{d}{V+u}$ である。

よって、

時刻 $t=0$ に A から出た音を M が観測する時刻は、 $\frac{d}{V+u}$

時刻 $t=T$ に A から出た音を M が観測する時刻は、 $T + \frac{d}{V+u}$

より、観測した時間は、 $\left(T + \frac{d}{V+u}\right) - \frac{d}{V+u} = T$

風が吹くときの音の伝わる速さと観測者の位置の関係

無風するときの音が伝わる速さを v_0 、一定方向に速さ w の風が吹いているとする。

音（波面）は、媒質（空気）という乗り物（風）に速さ w 運ばれながら、その媒質（空気）中を速さ v_0 で伝わる（広がる）。

「風が吹く・吹かない」とは、「媒質という乗り物が動く・動かない」ということである。

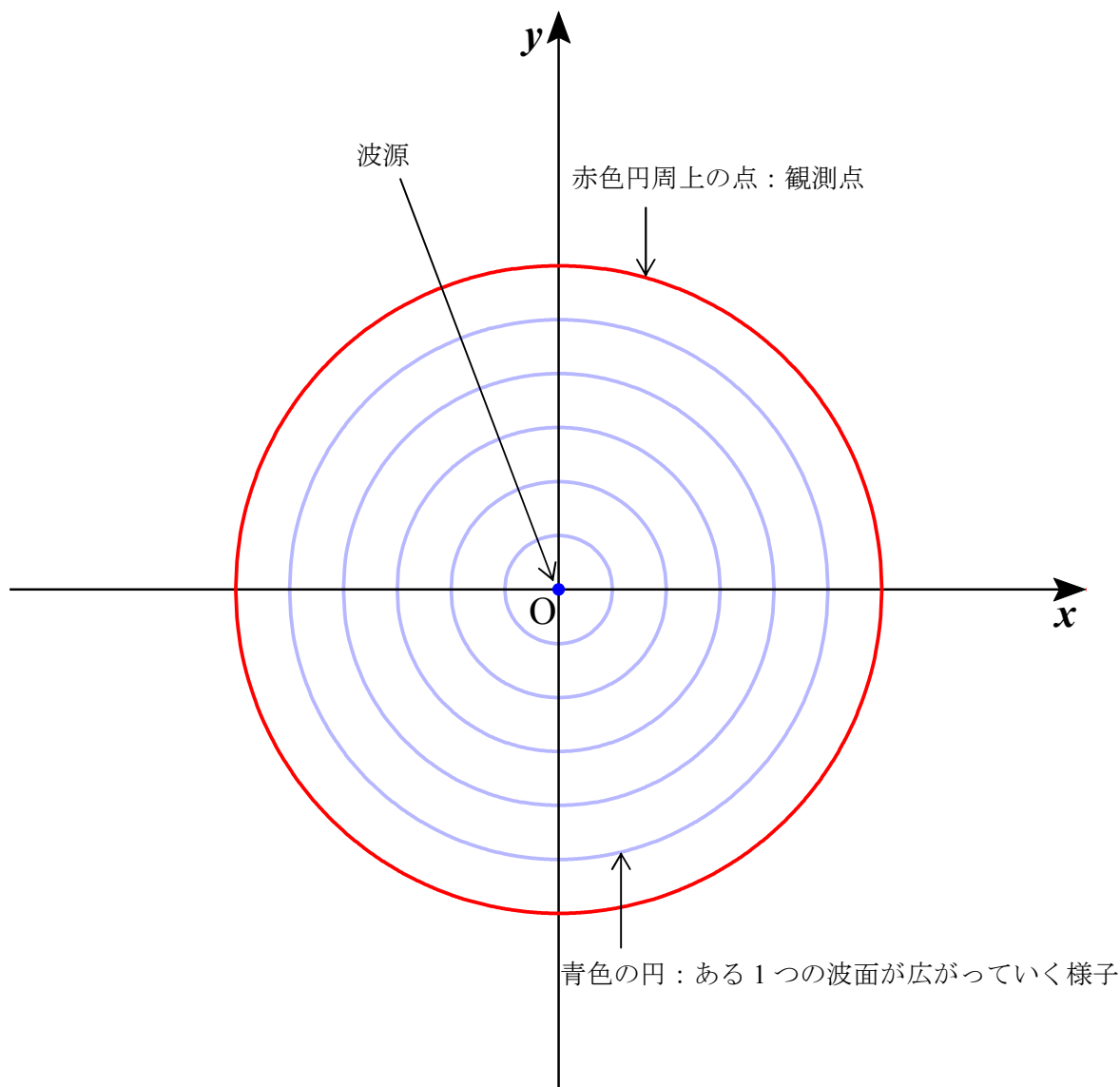
よって、音が観測者に伝わる速さを V とすると、

V は媒質中を音が伝わる速さ（波面が広がる速さ） v_0 と媒質の運動（風）の速度で決まる。

そこで、音が風で運ばれる様子のある1つの波面が風に運ばれ広がっていく場合で考える。

無風するとき

赤色の円周上の任意の観測者に到達する波面の半径は同じである。



一定方向に速さ w の風が吹いているとき

x 軸方向に速さ w の風が吹いている中、

時刻 $t=0$ のとき原点 O に固定された波源が 1 つの波面を出したとする。

媒質は x 軸方向に速さ w で移動しているから、

その波面中心は x 軸方向に速さ w で移動し、波面は波面中心に対し速さ V_0 で広がっていく。

小さな球体が風に運ばれながら膨張していく様子をイメージし、

その球面を波面に例えるとわかりやすいと思う。

波面の xy 平面断面で考えると、

時刻 t における波面中心の座標 $(wt, 0)$ 、波面の半径 $= V_0 t$ であるから、

その方程式は、 $(x - wt)^2 + y^2 = (V_0 t)^2$ ……①

よって、観測点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ まで波面が到達するのにかかる時間 t を求めるには、

①に $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を代入し、この方程式を解けばよい。

$(r \cos \theta - wt)^2 + (r \sin \theta)^2 = (V_0 t)^2$ より、 $r^2 \cos^2 \theta - 2rw \cos \theta \cdot t + w^2 t^2 + r^2 \sin^2 \theta = V_0^2 t^2$

これを t について整理すると、 $(V_0^2 - w^2)t^2 + 2rw \cos \theta \cdot t - r^2 = 0$ ($t \geq 0$)

$$\begin{aligned} \therefore t &= \frac{-rw \cos \theta + \sqrt{r^2 w^2 \cos^2 \theta + r^2 (V_0^2 - w^2)}}{V_0^2 - w^2} \\ &= \frac{-rw \cos \theta + r \sqrt{V_0^2 - w^2 (1 - \cos^2 \theta)}}{V_0^2 - w^2} \end{aligned}$$

これを整理すると、 $t = \frac{r}{V_0^2 - w^2} \left(-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta} \right)$ ……②

また、

観測点に向かう波面の速さを V とすると $Vt = r$

無風るとき波面が観測点に到達するのにかかる時間を t_0 とすると $V_0 t_0 = r$ より、

$$V = \frac{t_0}{t} V_0 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

③に②を代入すると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{t_0}{t} V_0 \\ &= \frac{\frac{r}{V_0}}{\frac{r}{V_0^2 - w^2} \left(-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta} \right)} V_0 \\ &= \frac{V_0^2 - w^2}{-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

以上より,

x 軸方向に速さ w の風が吹いているとき, 観測点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ で観測する音速 V は,

$$V = \frac{V_0^2 - w^2}{-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta}}$$

である。

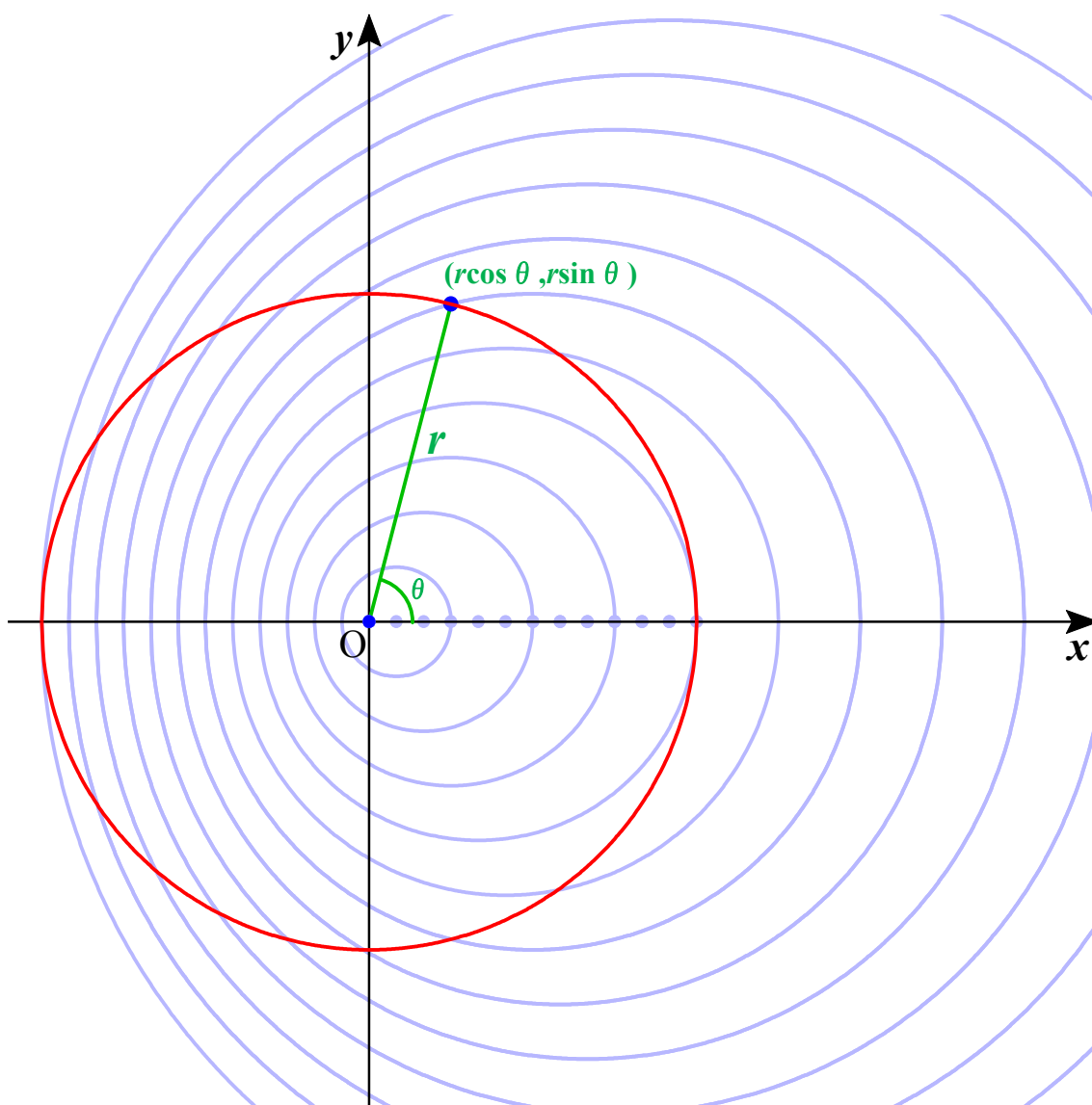
ゆえに,

$$\theta = 0 \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{-w + V_0} = V_0 + w$$

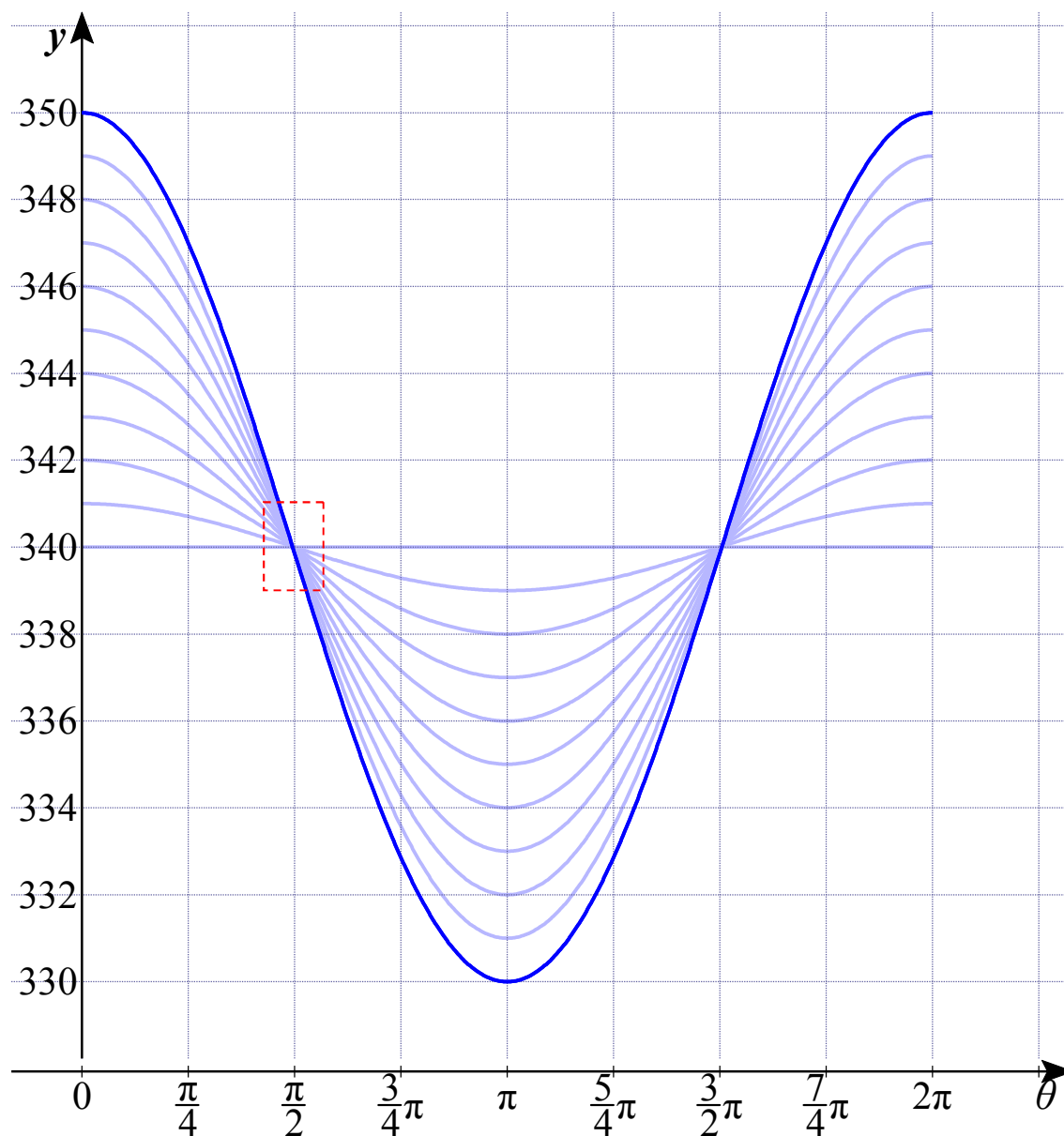
$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } V = \frac{V^2 - w^2}{-\frac{w}{\sqrt{2}} + \sqrt{V^2 - \frac{w^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(V^2 - w^2)}{-w + \sqrt{2V^2 - w^2}}$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{\sqrt{V_0^2 - w^2}} = \sqrt{V_0^2 - w^2}$$

$$\theta = \pi \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{w + V_0} = V_0 - w$$



$V_0 = 340 \text{ m/s}$ とし, w を 0m/s から 10m/s まで 1m/s ずつ変化させていくと, 次図のようになる。



このグラフからだと, $\left(\frac{\pi}{2}, 340\right)$ と $\left(\frac{3}{2}\pi, 340\right)$ が定点であるとの誤解を招きかねないので, 赤色破線で囲まれた枠内を拡大してみる。

