# 54. ドップラー効果

**(1)**

$\boxed{\text{イ}}$

音源が出した 1 個の波を位置 A で観測する時間は，

$\boxed{\text{ア}}$より，$\dfrac{1}{f_0}+\dfrac{1}{V}\left\{\sqrt{d^2+\left(\dfrac{v}{f_0}\right)^2-2d\dfrac{v}{f_0}\cos\theta}-d\right\}$だから，

位置 A で 1 秒間あたりに観測する波数，すなわち観測する振動数 $f$ は，

$$f=\frac{1}{\dfrac{1}{f_0}+\dfrac{1}{V}\left\{\sqrt{d^2+\left(\dfrac{v}{f_0}\right)^2-2d\dfrac{v}{f_0}\cos\theta}-d\right\}}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sqrt{d^2+\left(\frac{v}{f_0}\right)^2-2d\frac{v}{f_0}\cos\theta}&=d\sqrt{1+\left(\frac{\frac{v}{f_0}}{d}\right)^2-2\frac{\frac{v}{f_0}}{d}\cos\theta}\\&\approx d\sqrt{1+0-\frac{2v\cos\theta}{df_0}}\\&=d\left\{1+\left(-\frac{2v\cos\theta}{df_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\&\approx d\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2v\cos\theta}{df_0}\right)\right\}\\&=d-\frac{v\cos\theta}{f_0}\end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{\dfrac{1}{f_0} + \dfrac{1}{V}\left\{\sqrt{d^2 + \left(\dfrac{v}{f_0}\right)^2 - 2d\dfrac{v}{f_0}\cos\theta} - d\right\}} \\
&\approx \frac{1}{\dfrac{1}{f_0} + \dfrac{1}{V}\left(d - \dfrac{v\cos\theta}{f_0} - d\right)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{f_0} \; \dfrac{v\cos\theta}{Vf_0}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{V - v\cos\theta}{Vf_0}} \\
&= \frac{V}{V - v\cos\theta} f_0
\end{aligned}
$$

補足

$0 < \dfrac{v}{f_0} << d$ より， $0 < \dfrac{\frac{v}{f_0}}{d} << 1$ よって， $0 < \left(\dfrac{\frac{v}{f_0}}{d}\right)^2 << \dfrac{\frac{v}{f_0}}{d} << 1$

したがって， $\left(\dfrac{\frac{v}{f_0}}{d}\right)^2 \approx 0$ としてよい。

また，

$f(x) = (1+x)^n$ のとき， $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ より，

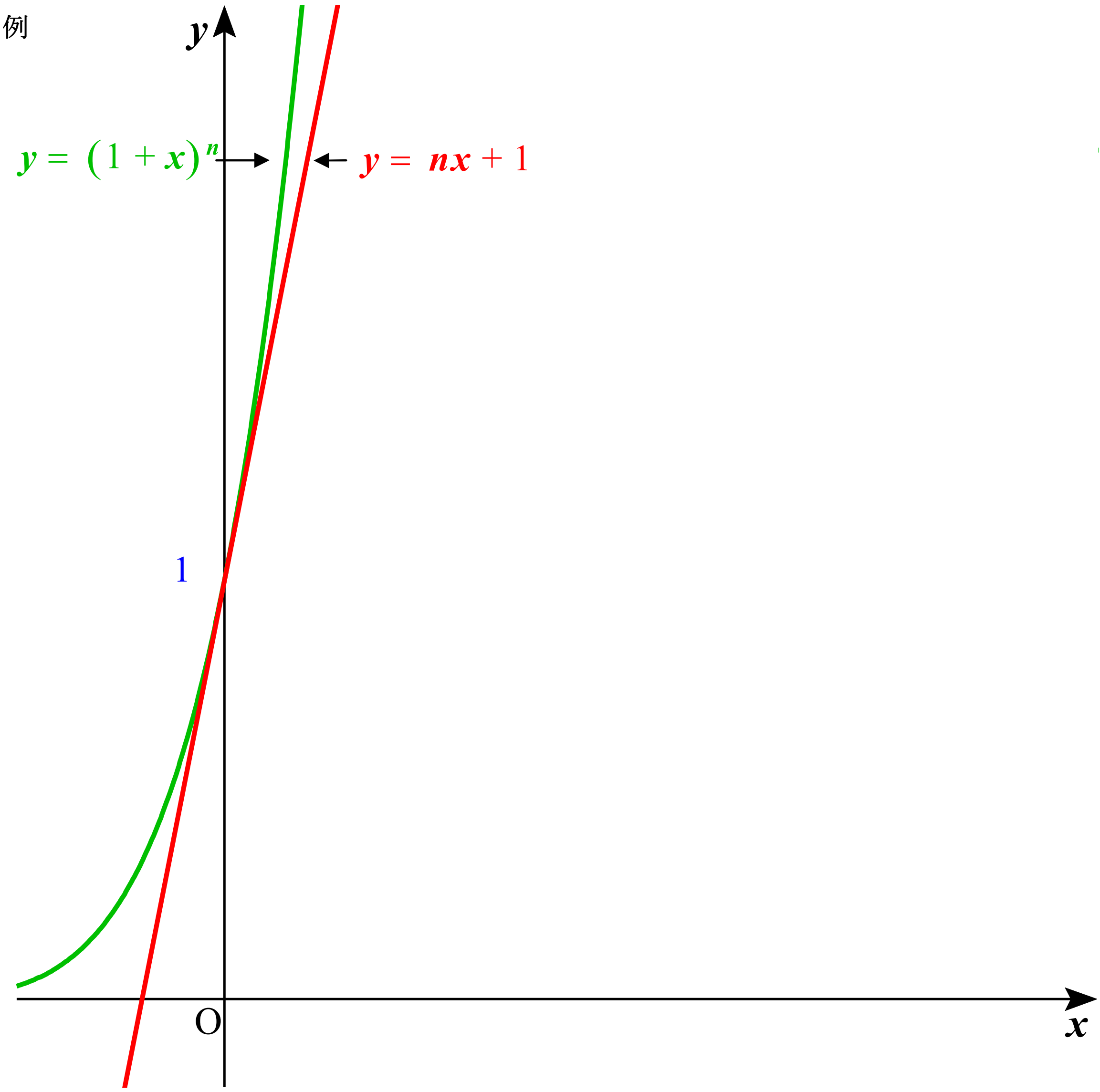
接点 $(0, f(0))$ における接線の方程式は， $y = f'(0)(x-0) + f(0) = nx + 1 \quad \therefore y = 1 + nx$

ゆえに， $|x| << 1$ において， $(1+x)^n \approx 1 + nx$

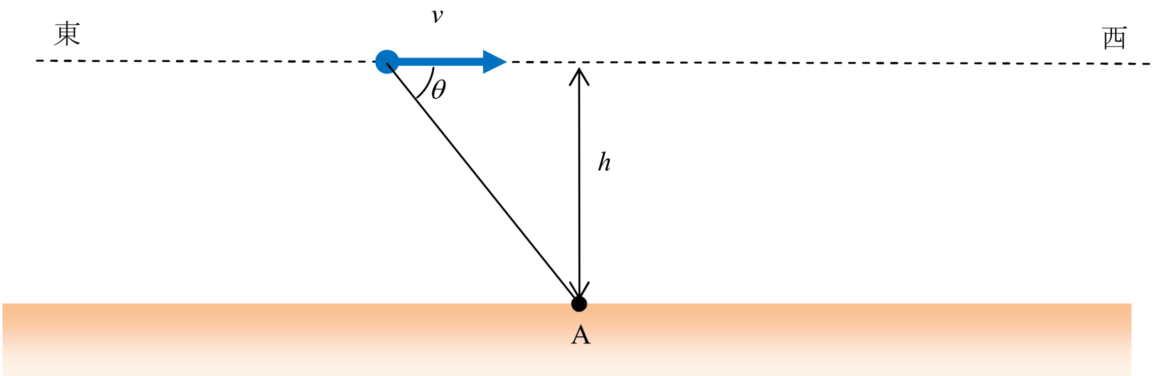
$\left\{1 + \left(-\dfrac{2v\cos\theta}{df_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ では， $-\dfrac{2v\cos\theta}{df_0} = x$ とおくと， $|x| << 1$ だから， $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$

$$
\therefore \left\{1 + \left(-\frac{2v\cos\theta}{df_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2v\cos\theta}{df_0}\right) = 1 - \frac{v\cos\theta}{df_0}
$$

例



**(2)**




**飛行機の速度 $\boldsymbol{v}$**

「遠く」は無限遠のことだから，

遠く東（極東）なら$\theta=0$，遠く西（極西）なら$\theta=\pi$としてよい。

よって，

極東から聞こえ始めた音の振動数$f_E$は，$f_E=\dfrac{V}{V-v\cos 0}f_0=\dfrac{V}{V-v}f_0$

極西へ遠く飛び去っていく際の音の振動数$f_W$は，$f_W=\dfrac{V}{V-v\cos\pi}f_0=\dfrac{V}{V+v}f_0$

これと$f_W=\dfrac{1}{3}f_E$より，$\dfrac{V}{V+v}f_0=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{V}{V-v}f_0$すなわち$\dfrac{1}{V+v}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{V-v}$ $\quad\therefore v=\dfrac{V}{2}$

ゆえに，$v=1.7\times10^2\ \mathrm{m/s}$

**高度 *h***

振動数 $f_E\left(=\dfrac{V}{V-v}f_0\right)$ の $\dfrac{2}{3}$ になるときの $\theta$ を $\theta_1$，$\dfrac{1}{2}$ になるときの $\theta$ を $\theta_2$ とする。

$\theta_1$ を求める

$\dfrac{V}{V-v\cos\theta_1}f_0=\dfrac{2}{3}\dfrac{V}{V-v}f_0$ より，$\dfrac{1}{V-v\cos\theta_1}=\dfrac{2}{3V-3v}$

$V=2v$ より，$\dfrac{1}{2v-v\cos\theta_1}=\dfrac{2}{6v-3v}$　　$\therefore\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<180°$ だから，$\theta_1=60°$

$\theta_2$ を求める

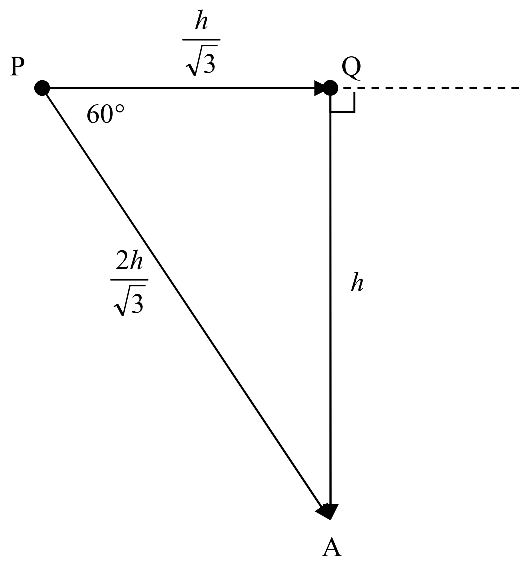
$\dfrac{V}{V-v\cos\theta_2}f_0=\dfrac{1}{2}\dfrac{V}{V-v}f_0$ より，$\dfrac{1}{V-v\cos\theta_2}=\dfrac{1}{2V-2v}$

$V=2v$ より，$\dfrac{1}{2v-v\cos\theta_2}=\dfrac{1}{4v-2v}$　　$\therefore\cos\theta_2=0$

$0<\theta<180°$ だから，$\theta_2=90°$

高度 $h$ を求める

$\theta_1,\theta_2$ となる位置をそれぞれ P，Q とすると，位置関係は次図のようになる。




「振動数が最初の振動数の $\dfrac{2}{3}$ から $\dfrac{1}{2}$ まで変化する時間が 3.0 秒であった」

とは,

「位置 A で P からの音を観測してから Q からの音を観測するまで 3.0 秒かかった」

ということだから,

音源が P の位置に着いたときの時刻を 0 とすると，
P からの音を観測した時刻 $t_1$

$$t_1 = \frac{\mathrm{PA}}{V} = \frac{\frac{2h}{\sqrt{3}}}{V} = \frac{2h}{\sqrt{3}V}$$

Q の音を観測した時刻 $t_2$

$t_2$ = 音源が Q に到着した時刻＋Q の音が A に到達するのにかかった時間

$$= \frac{\mathrm{PQ}}{v} + \frac{\mathrm{QA}}{V} = \frac{\frac{h}{\sqrt{3}}}{v} + \frac{h}{V} = \frac{\frac{h}{\sqrt{3}}}{\frac{V}{2}} + \frac{h}{V} = \frac{2h}{\sqrt{3}V} + \frac{h}{V}$$

$3.0 = t_2 - t_1$ より，

$$3.0 = \left(\frac{2h}{\sqrt{3}V} + \frac{h}{V}\right) - \frac{2h}{\sqrt{3}V} = \frac{h}{V}$$

$$\therefore h = 3.0V = 3.0 \times 3.4 \times 10^2 = 1.02 \times 10^3 \approx 1.0 \times 10^3\ \mathrm{m}$$

重要

とくに波動の問題では，時間処理で混乱することがよくある。
そのような場合，時刻で考え，時間は時刻差として処理すればよい。
時刻の数直線を使って考えるのも有効である。