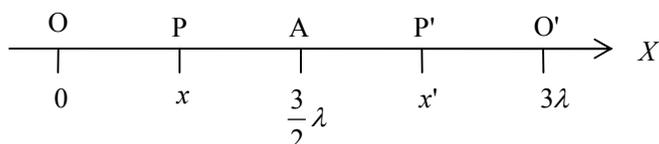


## 58 波の干渉

(3)

合成波（定常波）の方程式を求めてみる。



点 O, P と A に関して対称な点を O', P' とし、

波源 O を原点とする X 軸を上図のようにとる。

波源 O の単振動の方程式を  $y_0 = a \sin \omega t$  とする。

## 点 P における直接波の方程式

波源の時刻  $t$  の変位が点 P に伝わる時刻を  $t_p$ 、変位が伝わる速さ（波の速さ）を  $v$  とすると、

$$t_p = t + \frac{|x|}{v} \text{ より, } t = t_p - \frac{|x|}{v}$$

$$\text{よって, 点 P における変位を } y_p \text{ とすると, } y_p = a \sin \omega \left( t_p - \frac{|x|}{v} \right)$$

$$x > 0 \text{ より, } y_p = a \sin \omega \left( t_p - \frac{x}{v} \right)$$

$$\text{さらに } t_p \text{ を } t \text{ に書き改めることにより, } y_p = a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

## 点 P における反射波の方程式

反射波の位相が A で変化しないということは、点 P における反射波の位相と点 A で反射することなく通過した仮想波の点 P' における位相が同じということである。

したがって、点 P' における波の方程式を求めればよい。

$$O'P' = OP = |x| \text{ より, } x' = OO' - O'P' = 3\lambda - |x|$$

$$\text{これと } x > 0 \text{ より, } x' = 3\lambda - x$$

よって、反射波の点 P における変位を  $y_{p'}$  とすると、①と同様にして、

$$y_{p'} = a \sin \omega \left( t - \frac{x'}{v} \right) = a \sin \omega \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

## 合成波（定常波）の方程式

①+②より、

$$\begin{aligned}
 y_p + y_p' &= a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + a \sin \omega \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right) \\
 &= 2a \cos \omega \cdot \frac{t - \frac{x}{v} - \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right)}{2} \sin \omega \cdot \frac{t - \frac{x}{v} + \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right)}{2} \\
 &= 2a \cos \omega \cdot \frac{3\lambda - 2x}{2v} \sin \omega \left( t - \frac{3\lambda}{2v} \right) \\
 &= 2a \cos 2\pi f \cdot \frac{3\lambda - 2x}{2f\lambda} \sin 2\pi f \left( t - \frac{3\lambda}{2f\lambda} \right) \\
 &= 2a \cos 2\pi \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left( ft - \frac{3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

腹の位置

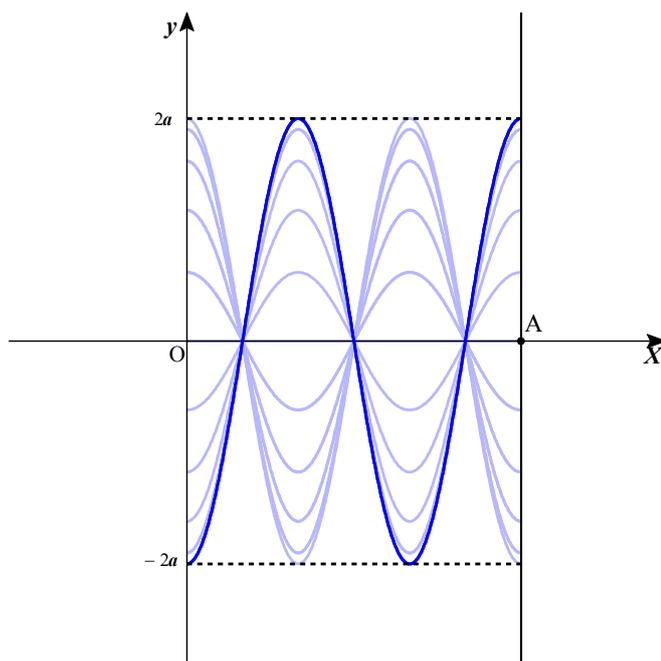
$$\cos 2\pi \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = \pm 1 \text{ を満たすから, } 2\pi \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = n\pi \quad \therefore x = \frac{\lambda}{2}(3 - n)$$

$$\text{これと } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\lambda \text{ より, } x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda$$

節の位置

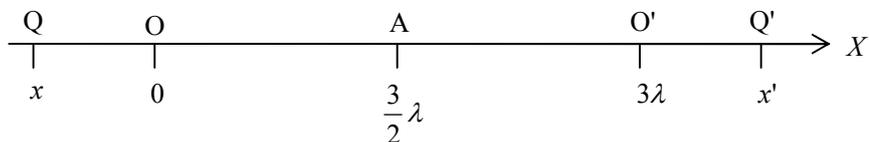
$$\cos 2\pi \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0 \text{ を満たすから, } 2\pi \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{\lambda} \right) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \therefore x = \frac{\lambda}{4}(5 - 2n)$$

$$\text{これと } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\lambda \text{ より, } x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda$$



(4)

合成波の方程式を求めてみる。



点 Q における直接波の方程式

波源の時刻  $t$  の変位が点 P に伝わる時刻を  $t_Q$ 、変位が伝わる速さ (波の速さ) を  $v$  とすると、

$$t_Q = t + \frac{|x|}{v} \text{ より, } t = t_Q - \frac{|x|}{v}$$

$$\text{よって, 点 Q における変位を } y_Q \text{ とすると, } y_Q = a \sin \omega \left( t_Q - \frac{|x|}{v} \right)$$

$$x < 0 \text{ より, } y_Q = a \sin \omega \left( t_Q + \frac{x}{v} \right)$$

$$\text{さらに } t_Q \text{ を } t \text{ に書き改めることにより, } y_Q = a \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

点 Q における反射波の方程式

反射波の位相が A で変化しないということは、点 Q における反射波の位相と点 A で反射することなく通過した仮想波の点 Q' における位相が同じということである。

したがって、点 Q' における波の方程式を求めればよい。

$$O'P' = OP = |x| \text{ より, } x' = OO' + O'Q' = 3\lambda + |x|$$

$$\text{これと } x < 0 \text{ より, } x' = 3\lambda - x$$

よって、反射波の点 Q における変位を  $y_Q$  とすると、③と同様にして、

$$y_{Q'} = a \sin \omega \left( t - \frac{x'}{v} \right) = a \sin \omega \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

合成波の方程式

③+④より,

$$\begin{aligned}
 y_Q + y_Q &= a \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + a \sin \omega \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right) \\
 &= 2a \cos \omega \cdot \frac{t + \frac{x}{v} - \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right)}{2} \sin \omega \cdot \frac{t + \frac{x}{v} + \left( t - \frac{3\lambda - x}{v} \right)}{2} \\
 &= 2a \cos \omega \cdot \frac{3\lambda}{2v} \sin \omega \left( t + \frac{2x - 3\lambda}{2v} \right) \\
 &= 2a \cos 2\pi f \cdot \frac{3\lambda}{2f\lambda} \sin 2\pi f \left( t + \frac{2x - 3\lambda}{2f\lambda} \right) \\
 &= 2a \cos 3\pi \sin 2\pi \left( ft + \frac{x}{\lambda} - \frac{3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

これより, 振幅 =  $|2a \cos 3\pi| = 2a$

ゆえに, 点 Q における単振動の方程式は  $y = 2a \sin 2\pi \left( ft + \frac{x}{\lambda} - \frac{3}{2} \right)$

