

2. 静電気

(1)

粒子の大きさが無視できるから、粒子 B は点電荷としてよい。

したがって、電位 (単位電荷の静電気力の位置エネルギー) の基準位置を無限遠にとると、

粒子 B からの距離が r の位置の電位は $k \frac{Q}{r}$ [V] で与えられる。

よって、電荷が $+q$ の粒子 A の静電気力の位置エネルギーは $k \frac{qQ}{r}$ [J] ($J=C \cdot V$)

また、条件より、この系では、静電気力 (保存力) のみが働いているから、

力学的エネルギー保存則

静電気力の位置エネルギー + 運動エネルギー = 一定
が成り立つ。

粒子 A の最初の位置の力学的エネルギー

「粒子 A が最初 B から十分離れた位置にある」は、

「粒子 A が最初 B から無限遠の位置にある」としてよいから、

最初の位置の粒子 A の静電気力の位置エネルギーは、 $\lim_{r \rightarrow \infty} k \frac{qQ}{r} = 0$

運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv_0^2$

よって、力学的エネルギーは、 $\frac{1}{2}mv_0^2$. . . ①

粒子 A が粒子 B に最接近した位置の力学的エネルギー

粒子 A の静電気力の位置エネルギーは、 $\frac{kqQ}{r_0}$

最接近したとき粒子 A は固定された粒子 B に対し静止するから、

粒子 A の速さは 0 になる。したがって、その運動エネルギーは 0

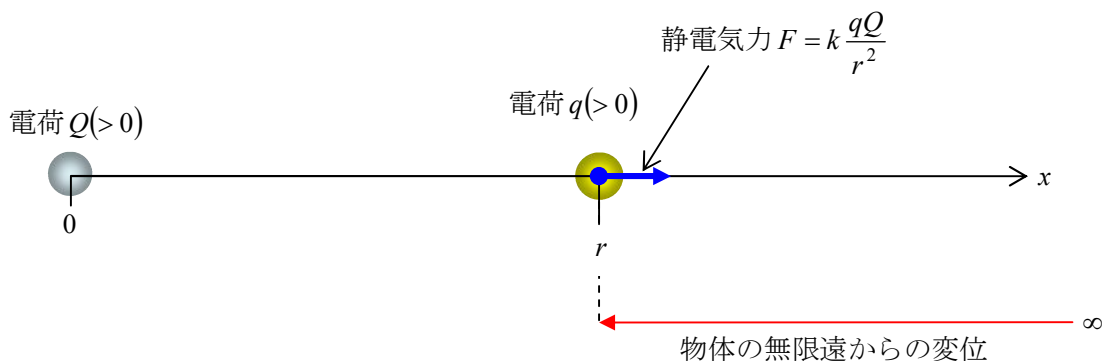
よって、力学的エネルギーは、 $\frac{kqQ}{r_0}$. . . ②

以上より、①=②、すなわち $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{kqQ}{r_0}$ が成り立つ。

よって、 $r_0 = \frac{2kqQ}{mv_0^2}$. . . (答)

補足

点電荷 $Q (> 0)$ がつくる電界中の電荷の静電気力の位置エネルギーと電位の求め方



変位の向きと静電気力（保存力）の向きのなす角は 180° だから、
電荷 q が微小変位するとき、

$$\text{静電気力（保存力）がする仕事 } dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = |\vec{F}| |d\vec{x}| \cos 180^\circ = -|\vec{F}| |d\vec{x}|$$

よって、電荷 q が無限遠から $x=r$ まで変位するとき、保存力がする仕事 W は、

$$\begin{aligned} W &= - \left| \int_r^\infty dW \right| \\ &= - \left| \int_r^\infty \frac{kqQ}{x^2} dx \right| \\ &= - \left[-\frac{kqQ}{x} \right]_r^\infty \\ &= -\frac{kqQ}{r} \end{aligned}$$

変化前の位置エネルギー－保存力がした仕事＝変化後の位置エネルギー－
無限遠の静電気力の位置エネルギー＝0

より、

$$x=r \text{ における静電気力の位置エネルギー} = 0 - \left(-\frac{kqQ}{r} \right) = \frac{kqQ}{r}$$

$x=r$ における電位 V

電位の定義：電界中の単位電荷（+1C の電荷）がもつ静電気力の位置エネルギー

よって、静電気力の位置エネルギー＝ $\frac{kqQ}{r}$ に $q=1$ を代入することにより、

$$V = \frac{kQ}{r}$$

参考**静電気力（クーロン力）空間**

何もない空間に電荷（＝電気量）をもつ物体をおいたとき、その空間の性質が変化し、電荷をもつ物体に対し力をおよぼす空間ができる。

この空間が静電気力空間（電界・電場）である。

対象となる物体

電荷を持った物体

保存力

静電気力（クーロン力）

静電気力

電荷 q が強さ E の電界から受ける静電気力 $= qE$

電荷 q の位置エネルギー

強さ E の一様な電界の場合

電界の発生源へ距離 d 接近したときの位置エネルギー変化は qEd

+ QC の点電荷がつくる電界の場合

点電荷の方へ距離 r 接近したときの電位変化は $k \frac{Qq}{r}$

電界の強さ E について

電界は空間に電荷 Q を置くことで生じ、

$Q > 0$ ならば正電荷をもつ物体に対し反発力が、負電荷をもつ物体に対しては引力が働き、 $Q < 0$ ならばその逆となるが、これは直感的に理解できると思う。

問題は、電荷 Q がつくる電界の強さ E の表し方であるが、

これは、光源の明るさと光源の形状に例えるとわかりやすい。

つまり、光源の光の強さが電荷 Q の大きさに、光源の形状が電荷の形状にあたり、光源に照らされた部分の明るさが電界の強さ E にあたる。

電荷 Q が点電荷のとき

- ・電荷 Q と対応する光源は豆電球であり、光源の光の強さを Q とする。
- ・豆電球から出た光線は放射状に広がっていくから、光源からの距離が r の領域の明るさは同じである。
- ・光源からの距離が r の領域の面積 S は半径 r の球面の面積と同じだから、 $S = 4\pi r^2$
- ・誘電率 ϵ は、ちりなどによる光阻止率にあたり、これを ϵ とする。

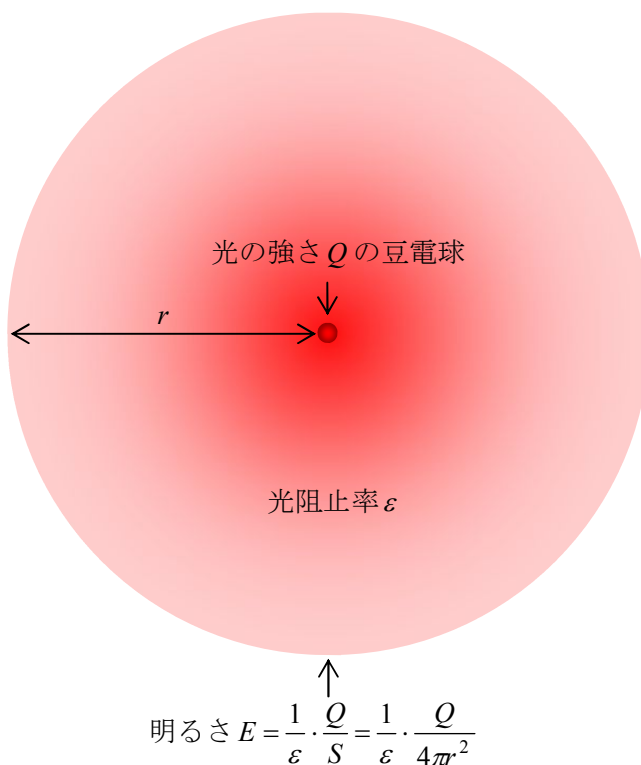
電界の強さ E は光源からの距離が r の領域が単位面積あたりに受ける光の強さ、つまりその領域の明るさであり、これを E とすると、

$$E = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{S} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ とおくと、教科書に記載されている $E = k \frac{Q}{r^2}$ が得られる。

しかし、電界の強さを統一的に理解する上で大事なのは、
電界の強さ E は、単位面積あたりに受ける光の強さに対応するというのである。

つまり、式 $E = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{S}$ が重要である。点電荷の場合、 $S = 4\pi r^2$ を代入したに過ぎない。



また、 $+Q$ の点電荷から距離 r にある電荷 $+q$ の位置エネルギーについては、
万有引力の場合と同様、無限遠を基準とする約束になっている。
よって、電荷 $+q$ を無限遠から距離 r まで移動させるときに、外力がする仕事と等しい。
電荷の変位と外力の向きが等しいから、

外力がする微小の仕事は、 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = |\vec{F}| |d\vec{x}| \cos 0^\circ = |\vec{F}| |d\vec{x}| > 0$ より、

位置エネルギー = 外力がする仕事 > 0 となればよい。

$$\left| \int_r^\infty dW \right| = \left| \int_r^\infty k \frac{Qq}{x^2} dx \right| = \left| \left[-k \frac{Qq}{x} \right]_r^\infty \right| = k \frac{Qq}{r}$$

よって、電荷 $+q$ の位置エネルギー $U = k \frac{Qq}{r}$

とくに、電荷が $+1C$ の単位電荷の位置エネルギーを電位と呼ぶ。

点電荷 $+Q$ がつくる電界中の電位 $V = k \frac{Q}{r}$

電荷 Q が線電荷のとき

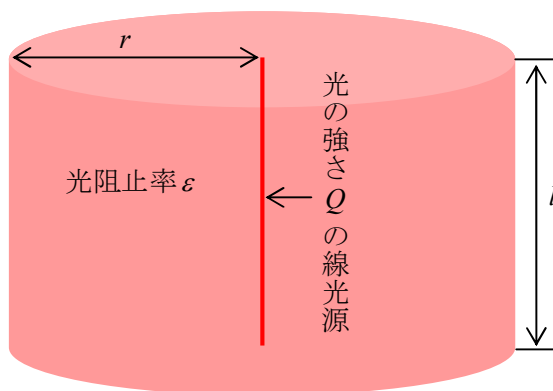
同様に、光の強さ Q の線光源で照らされたときの明るさをイメージすればよい。

線光源の長さを l とすると、線光源からの垂直距離 r の空間、

つまり長さ l 、半径 r の円柱の側面の明るさは同じであり、その面積を S とすると、

$$S = 2\pi r l \text{ だから、その明るさは、 } E = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{S} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi r l}$$

これから、電界の強さ $E = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{S} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi r l}$ が得られる。



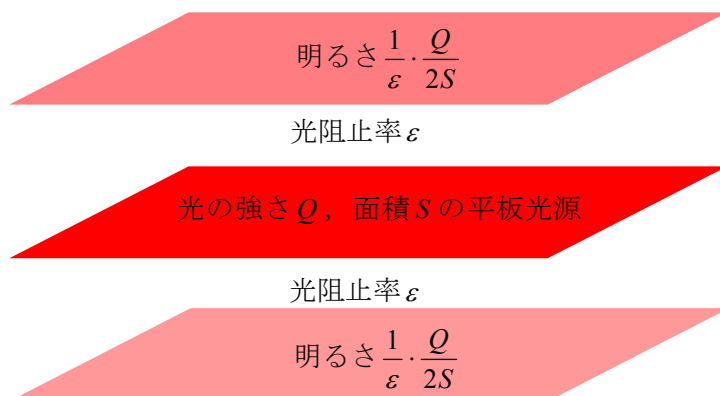
電荷 Q が平板電荷のとき

同様に、光の強さ Q の平板光源で照らされたときの明るさをイメージすればよい。
 平板の面積を S とすると、光線は、平板の両側から平板に垂直に出るから、広がらない。
 よって、平板から垂直にいくら距離をとっても光を受ける面積は $S + S = 2S$ である。

ゆえに、その明るさは、 $E = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2S}$

これから、電界の強さ $E = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2S}$ が得られる。

これは、平板コンデンサーの極板間の電界の強さを理解する鍵となる。



また、

電荷 $+q$ を $+Q$ の平板電荷の方へ距離 d 移動させたときの位置エネルギー変化は、
 外力がする仕事 qEd と等しいから、 $\Delta U = qEd$

とくに、電荷が $+1C$ の単位電荷のとき、
 その位置エネルギー変化の大きさを電位差と呼ぶ。

$$\Delta V = Ed$$