40　電磁界中の粒子

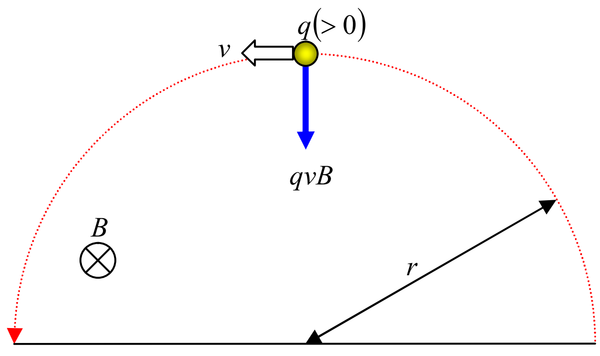
I

$\boxed{ア}$ $\dfrac{2\pi M}{qB}$

解説

荷電粒子はローレンツ力だけを受けて運動しているが，
その力の向きと荷電粒子の速度の向きとのなす角は $90°$ であるから，
それらのベクトルの内積，すなわち荷電粒子がローレンツ力にされる仕事率は 0 である。
よって，荷電粒子の運動エネルギーは変化しない。
荷電粒子の運動エネルギーは荷電粒子の速さで決まるので，
その運動エネルギーが変化しないことはその速さが一定であるということを意味する。
以上より，荷電粒子は，ローレンツ力を向心力とする等速円運動をする。
荷電粒子の円軌道の中心方向の加速度を a，接線方向の速度を v，軌道半径を r とすると，
向心力，すなわちローレンツ力の大きさは qvB だから，
円運動の中心方向の運動方程式は $Ma = qvB$
これと，等速円運動の角速度を ω とすると， $a = r\omega^2$， $v = r\omega$ より，
運動方程式は $Mr\omega^2 = qBr\omega$ となる。よって， $\omega = \dfrac{qB}{M}$ $\quad \therefore T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi M}{qB}$

あるいは， $a = \dfrac{v^2}{r}$ より， $M\dfrac{v^2}{r} = qvB$ $\quad \therefore v = \dfrac{qBr}{M}$ $\quad \therefore T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi r}{\frac{qBr}{M}} = \dfrac{2\pi M}{qB}$



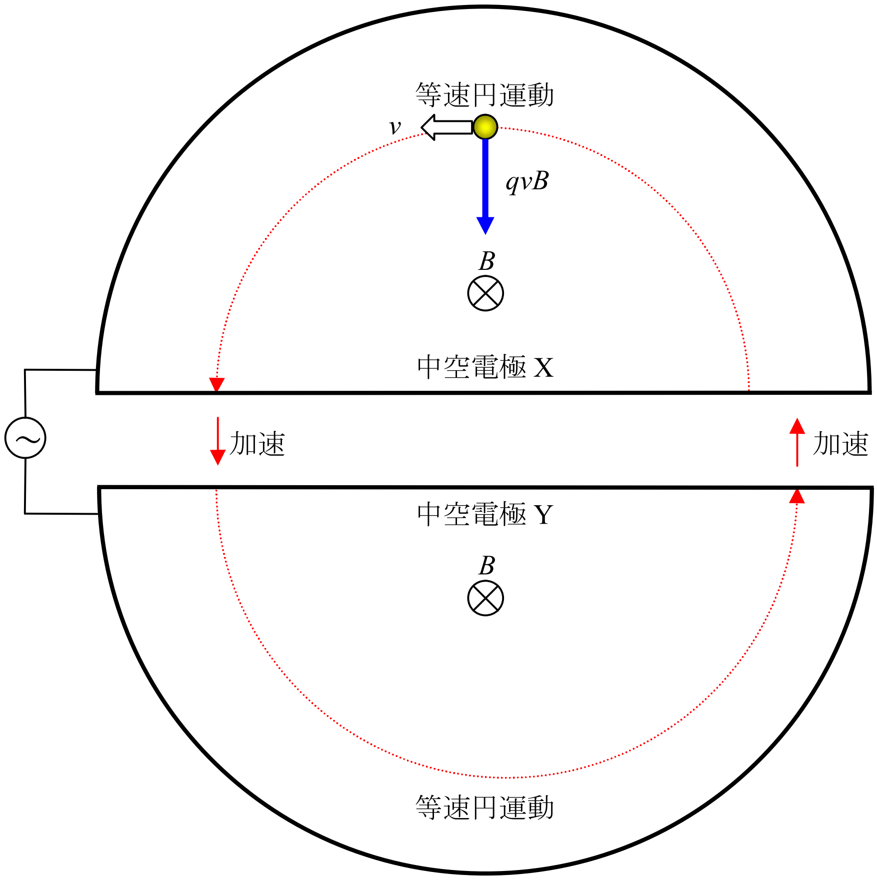
ローレンツ力の向きについて

荷電粒子の運動の向きを電流の向き（正電荷なら運動の向きが，負電荷なら運動の向きの逆向きが電流の向き）に置き換えて，フレミングの左手の法則を使って，
荷電粒子が受けるローレンツ力の向きを決めればよい。

$\boxed{イ}$ $\dfrac{qB}{2\pi M}$

解説

荷電粒子（$q>0$）が加速されるのは半円形の中空電極間を移動するときであり，
中空電極を X，Y とし，X の電位を V_X，Y の電位を V_Y とすると，
荷電粒子が電極間を移動するとき常に同じ向きに加速されるための必要十分条件は，
X から Y へ移動するときは，常に $V_X > V_Y$，
Y から X へ移動するときは，常に $V_X < V_Y$ となることであるから，
荷電粒子が電極間を移動するのに合わせて，電極間の電圧が同じで電位が逆転するよう交流電源の周波数（振動数）を調節，要するに，位相差が $(2n-1)\pi$ になるようにすればよく，そのような周波数は無数存在するので，ここでは必要な周波数の最小値を f として，それを求めることにする。すると，2 つの電極間の電圧が同じで電位が逆転するのは荷電粒子が電極間を移動するときだけであるから，交流電源の電圧の周期を T_E とすると，荷電粒子が 1 つの電極を等速円運動する時間 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi M}{qB}$ と $\dfrac{T_E}{2}$ が一致すればよいから，$f=\dfrac{1}{T_E}=\dfrac{1}{T}=\dfrac{qB}{2\pi M}$



$\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{(qBR)^2}{2M}$

解説

イオンが取り出し口Fに達したときの速さをv_Rとすると，

運動方程式$M\dfrac{{v_R}^2}{R}=qv_RB$より，$v_R=\dfrac{qBR}{M}$

よって，運動エネルギーは，$\dfrac{1}{2}M{v_R}^2=\dfrac{(qBR)^2}{2M}$

補足

実際の入試問題では，交流電源の電圧を$V(t)=V_0\cos(2\pi ft)$ [V]とし，

正イオンを，時刻$t=0$から$\dfrac{1}{6f}$ [s]間，連続的に入射させ，最初のイオンがFに到達したとき，最後のイオンは中心からのどれだけの距離にあるかをも求めさせている。

答は$\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

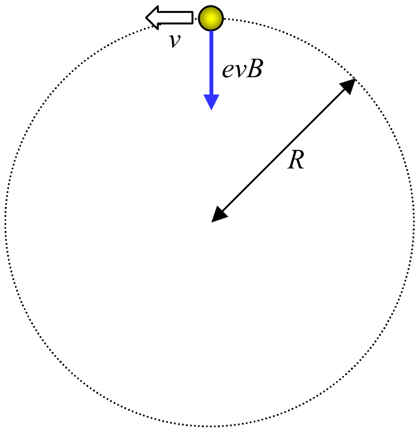
Ⅱ

$\boxed{\text{オ}}$ eBR

解説

電子の円運動の向心力はローレンツ力であるから，電子の速さを v とすると，

電子の円軌道の中心方向の運動方程式は，$\dfrac{mv^2}{R}=evB$　$\therefore\ p=mv=eBR$



$\boxed{\text{カ}}$ $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

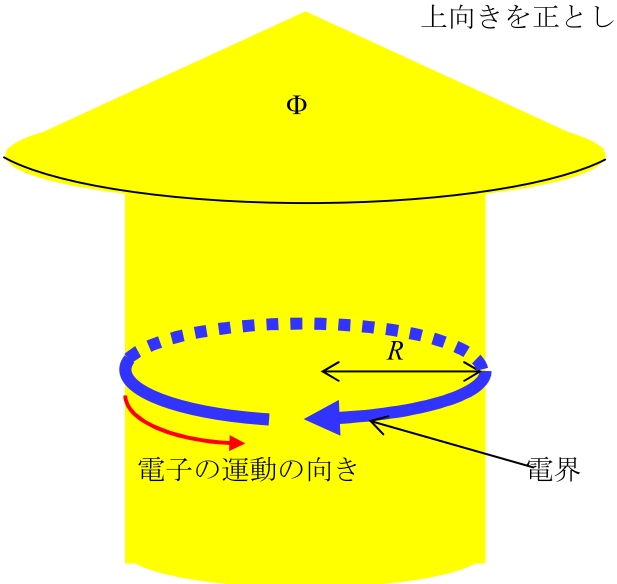
解説

ファラデーの電磁誘導の法則より，$V=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$\boxed{\text{キ}}$ $\dfrac{\Delta\Phi}{2\pi R\Delta t}$

解説

上向きを正とし，$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}>0$ のとき



半径 R ドーナツ状の真空の管を半径 R の円形コイルに置き換えて考えればよい。
半径 R の円形コイルに発生する電界を E とすると，
誘導起電力は，$V = E \cdot 2\pi R$ と表せる。

一方，ファラデーの電磁誘導の法則により，誘導起電力は，$V = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ とも表せる。

よって，$E \cdot 2\pi R = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ $\quad \therefore E = \dfrac{\Delta\Phi}{2\pi R\Delta t}$

$\boxed{\text{ク}}$ $\dfrac{e}{2\pi R}$

解説

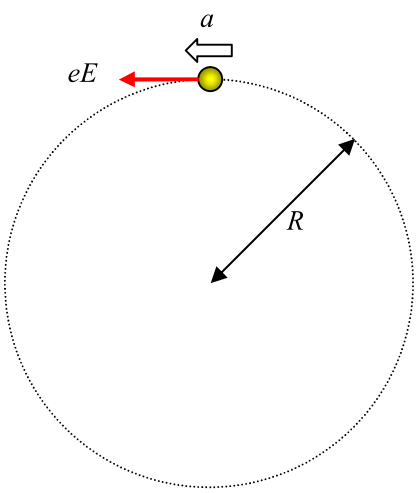
別解

電子の円軌道の接線方向の加速度を a とすると，$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

a は電子が電界から受ける力によるから，運動方程式は $ma = eE$

これと $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ より，$m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = eE$ $\quad \therefore m\Delta v = eE\Delta t$

$m\Delta v = \Delta p$ および $E = \dfrac{\Delta\Phi}{2\pi R\Delta t}$ より，$\Delta p = e \cdot \dfrac{\Delta\Phi}{2\pi R\Delta t} \cdot \Delta t = \dfrac{e\Delta\Phi}{2\pi R}$



$\boxed{\text{ケ}}$ $\dfrac{1}{2\pi R^2}$

解説

別解

電子が速さ $v+\Delta v$，軌道半径 R で円運動するときの磁束密度を $B+\Delta B$ とすると，

電子の円軌道の中心方向の運動方程式は，$\dfrac{m(v+\Delta v)^2}{R}=e(v+\Delta v)(B+\Delta B)$ となる。

$\therefore mv+m\Delta v=eRB+eR\Delta B$

さらに，$\boxed{\text{カ}}$の $mv=eRB$ より，$m\Delta v=eR\Delta B$

$m\Delta v=\Delta p=\dfrac{e\Delta\Phi}{2\pi R}$ より，$\dfrac{e\Delta\Phi}{2\pi R}=eR\Delta B$　　$\therefore \Delta B=\dfrac{1}{2\pi R^2}\times\Delta\Phi$