240. ブラッドリーの光速測定法

水平走行中の電車（地球）の車窓から見た雨（光）と同じように考えればよい。

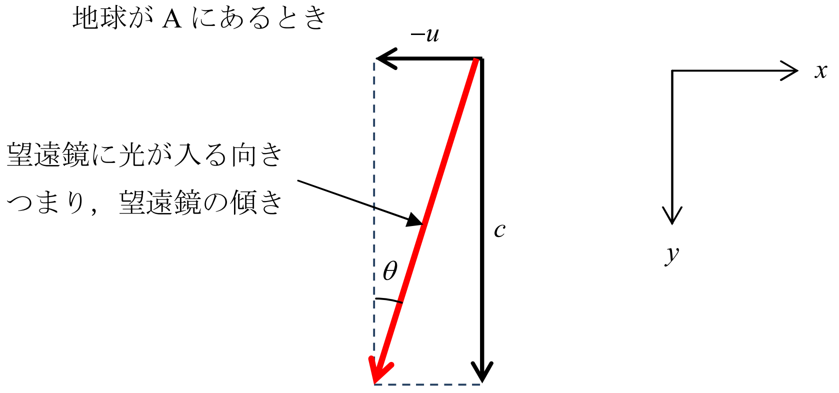
光の方向を y 軸正方向，地球の公転方向を x 軸正方向にとり，

それぞれの速度を成分表示すると，$\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$

よって，地球の観測者からみた光の速度，すなわち相対速度の成分表示は，

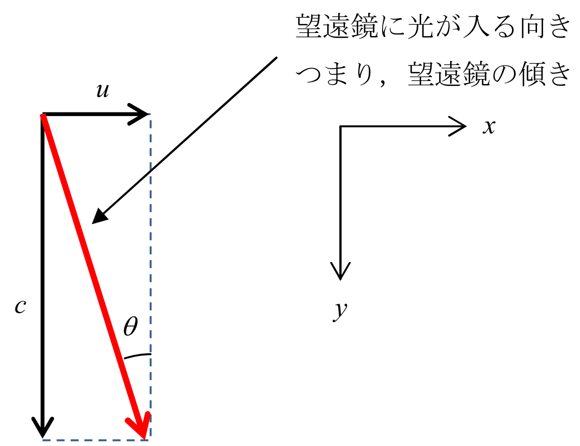
$\vec{c}-\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u\\c\end{pmatrix}$ である。

地球が A にあるとき



よって，$\theta\approx\tan\theta=\left|\dfrac{-u}{c}\right|=\dfrac{u}{c}$

地球が B にあるとき

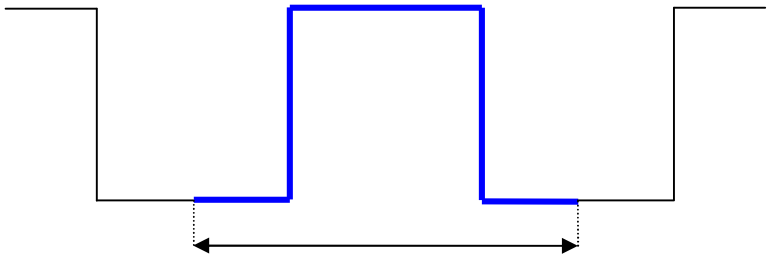


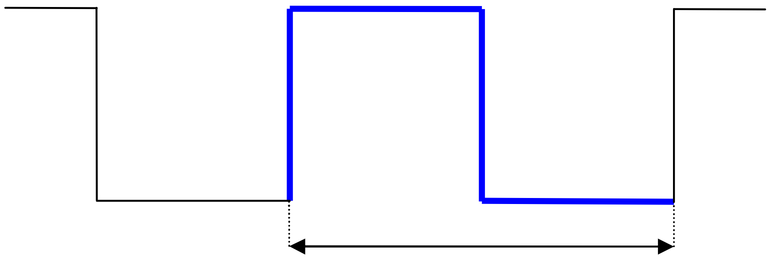
よって，地球が A にあるときと B にあるときとで，その見える方向が 2θ 程度異なる。

241．フィゾーの光速測定法

（ロ）

歯 1 こまとは





歯車の 1 秒間の回転数が n より，1 秒間のこま数は nN こま

よって，1 こま回転する時間は $\dfrac{1}{nN}$ 秒

ゆえに，$\dfrac{1}{2}$ こま回転する時間は，$\dfrac{1}{2nN}$ 秒

242. フーコーの光速測定法

（ホ）

下図より，$\triangle O_2O_1O \equiv \triangle O_2O_1'O$

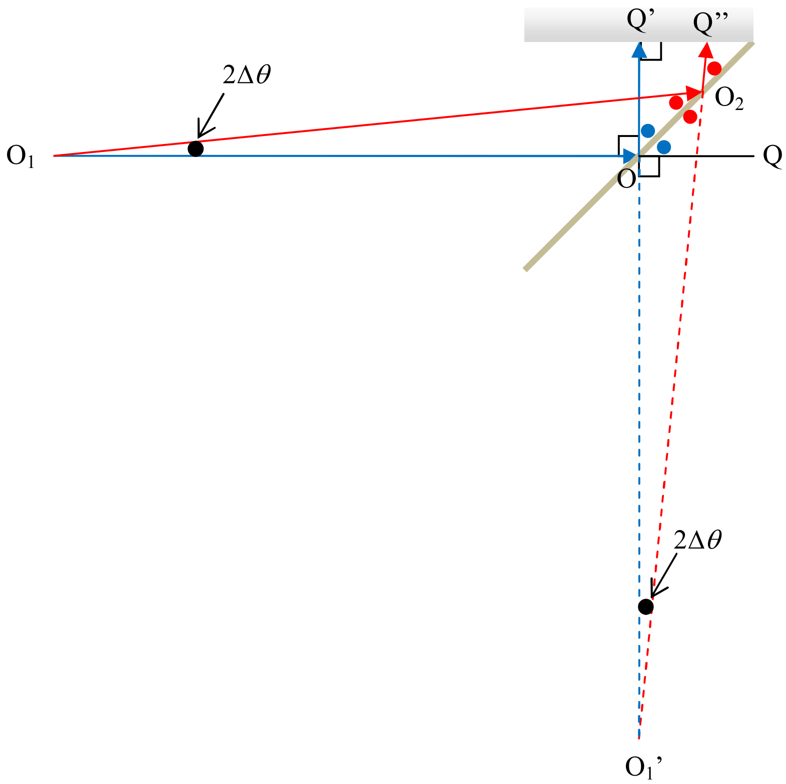
$\therefore \angle Q''O_1'Q' = \angle O_2O_1O = 2\Delta\theta$

これと

$$\begin{aligned} O_1'Q' &= O_1'O + OQ' \\ &= O_1O + OQ \left(\because \Delta O_2O_1O \equiv \Delta O_2O_1'O, OQ' = OQ\right) \\ &= O_1Q \\ &= D \end{aligned}$$

より，

$$d = Q'Q'' = D\tan 2\Delta\theta \approx D \cdot 2\Delta\theta = \frac{8\pi NlD}{c}$$



243. 屈折率と速度，波長の関係

（ロ）

「A から見た B」とか「A に対する B」では,

基準は A だから，A に対する B の数値＝$\dfrac{\text{Bの数値}}{\text{Aの数値}}$

よって，媒質Ⅰに対する媒質Ⅱの屈折率＝$\dfrac{n_2}{n_1}$

他

$n_i v_i = c$ より $n_i v_i$ ＝一定， $n_i \lambda_i = \dfrac{n_i v_i}{f} = \dfrac{c}{f}$ より $n_i \lambda_i$ ＝一定,

ホイヘンスの原理より $n_i \sin\theta_i$ ＝一定

245. 像の見かけの深さ

(1)

問題図に混乱させられないよう注意する。

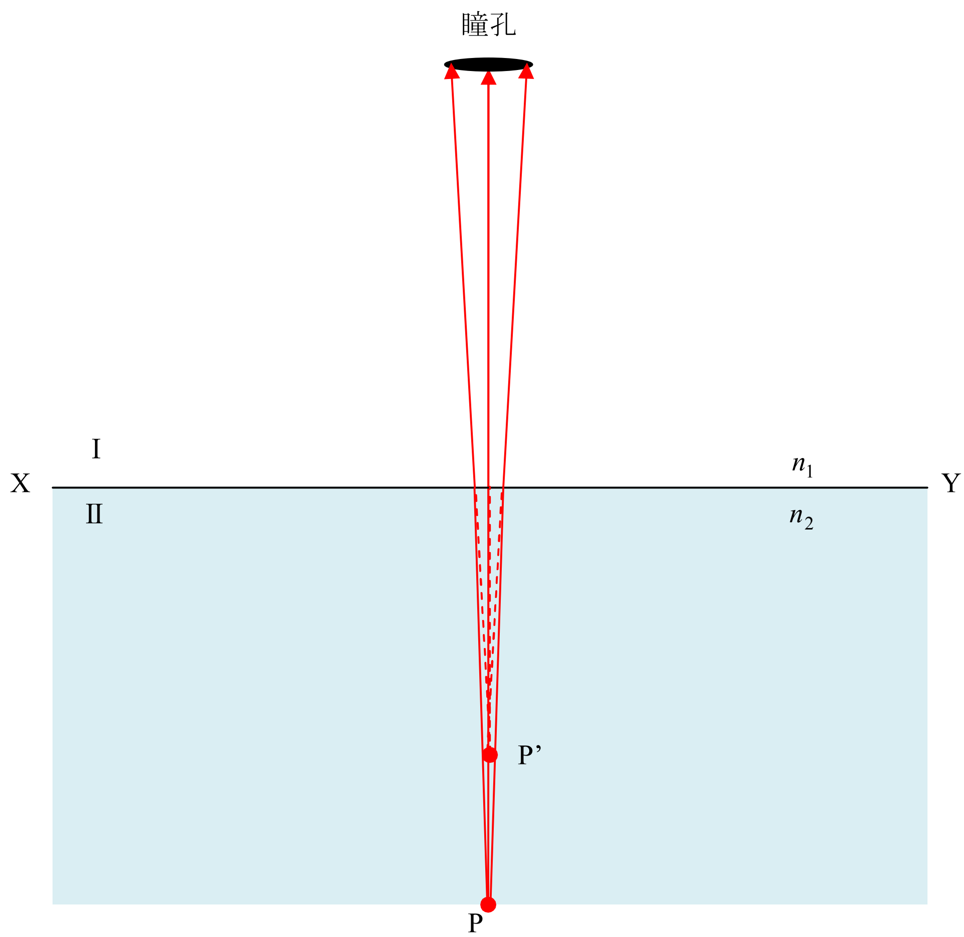
「境界面 X-Y から深さ d のところにある小物体 P を，

媒質Ⅰの中へ眼を置いて真上から見るとき，見かけの深さ d' はいくらか。」

に忠実に図を描くと，

小物体 P を見ることができるには，屈折光が眼の瞳孔に入らなければならないから，

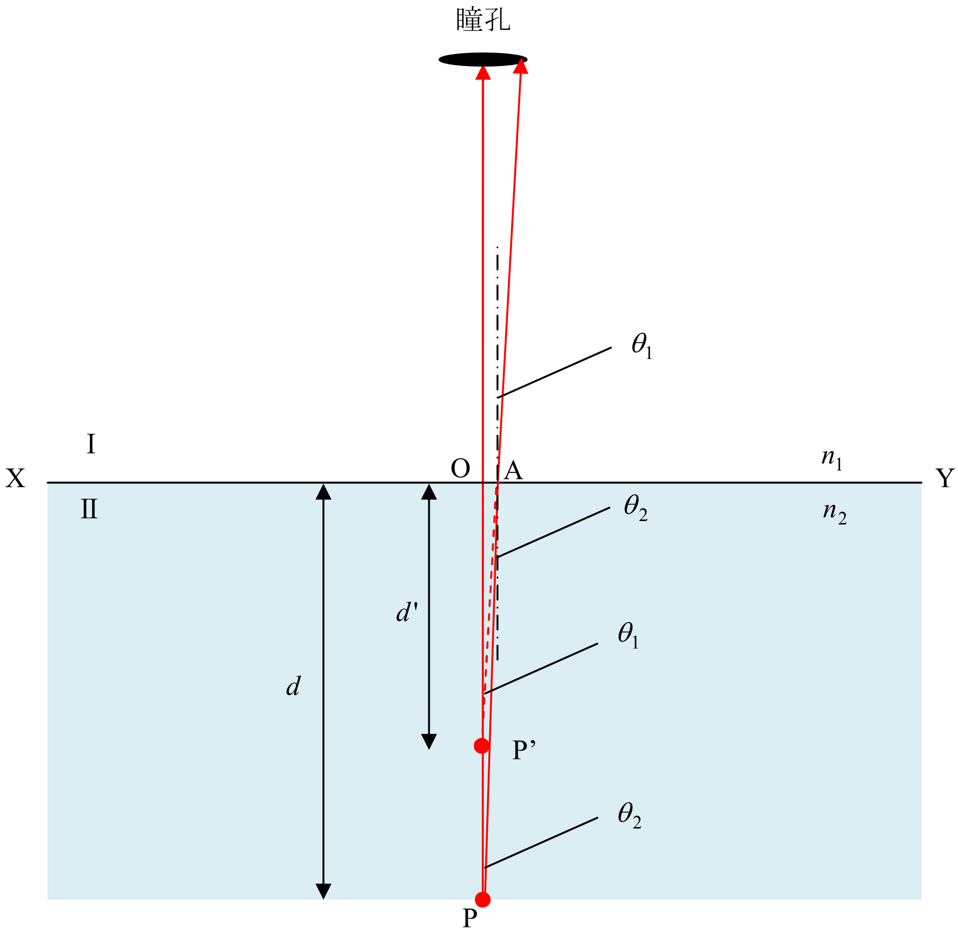
実際は，次のようになる。



したがって，θ_1 と θ_2 は十分小さい角と見ていい。

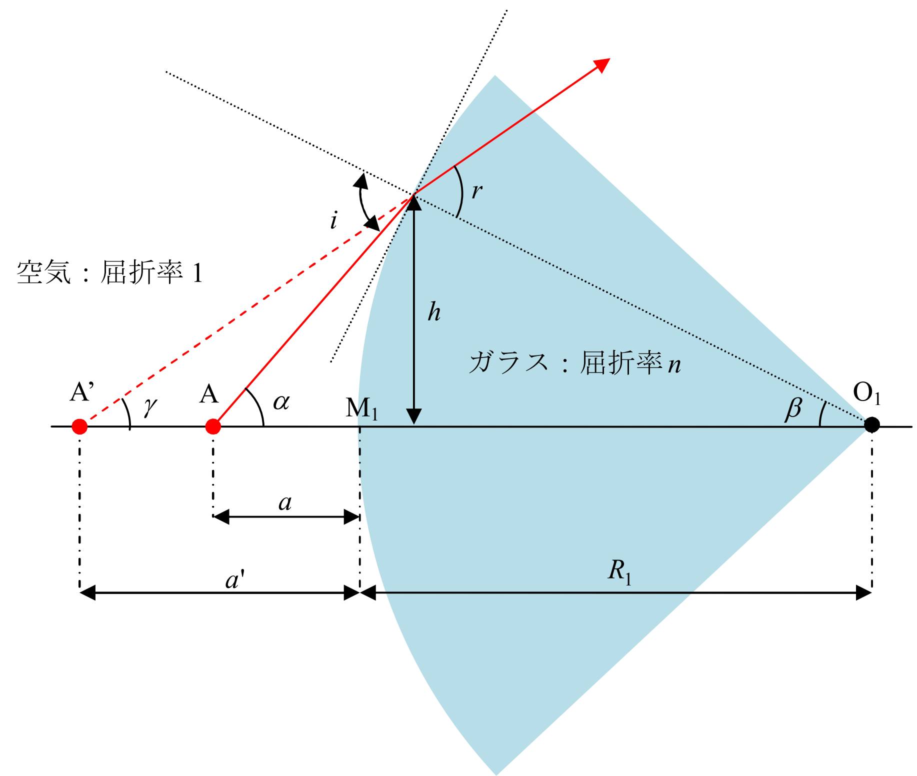
よって，$\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\approx\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{OA}}{d'}}{\dfrac{\mathrm{OA}}{d}}=\dfrac{d}{d'}$

$\therefore d'=\dfrac{d}{\dfrac{n_2}{n_1}}=\dfrac{d}{n_{12}}$



247. 凸レンズの公式

（イ）



$\sin i = n \sin r$

図は大袈裟に描いてあるが，近軸光線だから，実は $0 < i, r << 1$　$\therefore \sin i \approx i$，　$\sin r \approx r$

よって，　$i = nr$　・・・①としてよい。

$i = \alpha + \beta$，　$r = \beta + \gamma$ より，

$$\alpha + \beta \approx \tan\alpha + \tan\beta = \frac{h}{a} + \frac{h}{R_1} \quad \cdots ②$$

$$\beta + \gamma \approx \tan\beta + \tan\gamma = \frac{h}{R_1} + \frac{h}{a'} \quad \cdots ③$$

①，②，③より，$\dfrac{h}{a} + \dfrac{h}{R_1} = n\left(\dfrac{h}{R_1} + \dfrac{h}{a'}\right)$　$\therefore \dfrac{1}{a} + \dfrac{n}{-a'} = (n-1)\dfrac{1}{R_1}$　・・・(答)

249. 無限遠点の像

(1)

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ より，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{b}$

これと $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{a}=0$ より，$a\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{b}=0$，すなわち $b=f$

255. フレネル鏡による干渉

はじめに

鏡 AB の反射光線がスクリーンに当たる範囲

光源 S の鏡 AB についての像は S_1 だから，

鏡 AB の反射光がスクリーンに当たる範囲は，

直線 S_1A と XX’の交点と直線 S_1B と XX’の交点 F の範囲である。

鏡 BC の反射光線がスクリーンに当たる範囲

光源 S の鏡 BC についての像は S_2 だから，

鏡 BC の反射光がスクリーンに当たる範囲は，

直線 S_2B と XX’の交点 E と直線 S_2C と XX’の交点の範囲である。

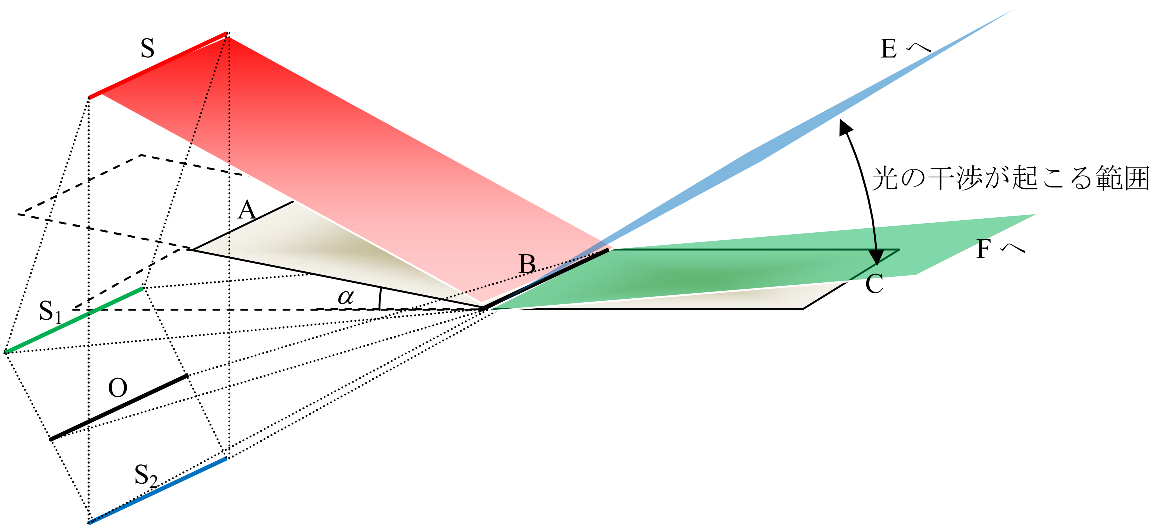
よって，2 つの鏡の反射光線は，スクリーン上の E から F の領域で重なり合う。

したがって，この領域において光の干渉が起こる。

具体的には，領域 EF 上の任意の点を P とすると，

S_1P と S_2P の光路差が波長の整数倍の位置で 2 つの反射光が強め合う。

すなわち明線（干渉縞）ができる。



(1)

解法 1

テキストの断面図で考えると，

直線 AB は直線 BC を点 B を軸に時計回りに角 α 回転させたものだから，

直線 AB 上の点 B における反射光線 BF と

直線 BC 上の点 B における反射光線 BE とのなす角，すなわち∠EBF＝2α

解法 2

直線 AB は線分 SS_1 の垂直二等分線，直線 BC は線分 SS_2 の垂直二等分線だから，

SS_1 と SS_2 のなす角＝直線 AB と直線 BC のなす角＝α

円周角と中心角の関係より，$\angle S_1BS_2 = 2\alpha$

よって，$\angle EBF = \angle S_1BS_2 = 2\alpha$

(2)

$\angle S_1BS_2 = 2\alpha$（解法 2）より，$\overline{S_1S_2} = 2a\alpha$

(3)

点 P の座標を x とすると，

$$\begin{aligned}
S_1P &= \left\{(a+b)^2 + (x - S_1'O)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\approx \left\{(a+b)^2 + (x - S_1O)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{(a+b)^2 + (x - a\alpha)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= (a+b)\left\{1 + \left(\frac{x - a\alpha}{a+b}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\approx (a+b)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - a\alpha}{a+b}\right)^2\right\} \qquad \left(\because \left(\frac{x - a\alpha}{a+b}\right)^2 << 1\right)
\end{aligned}$$

同様に，

$$S_2P \approx (a+b)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + a\alpha}{a+b}\right)^2\right\} \qquad \left(\because \left(\frac{x + a\alpha}{a+b}\right)^2 << 1\right)$$

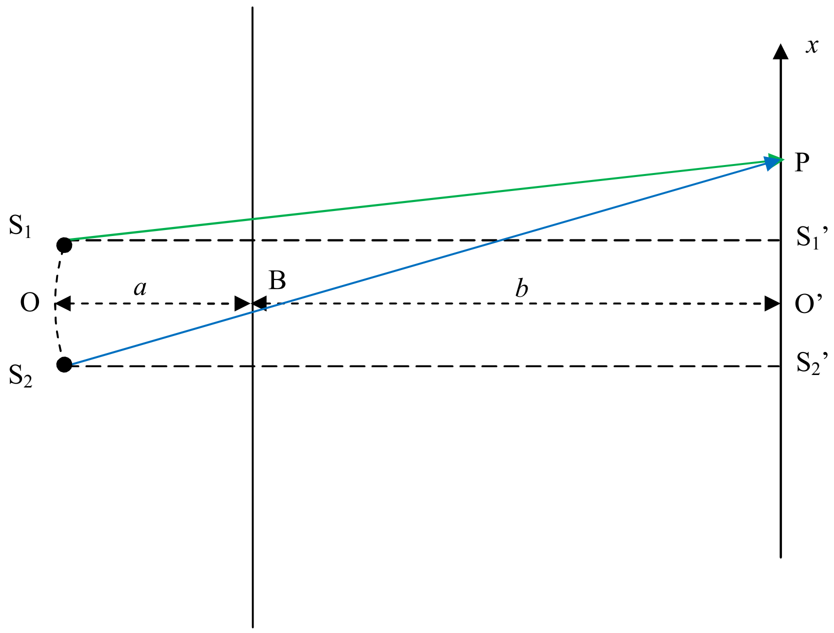
より，

$$\begin{aligned}
\left|S_2P - S_1P\right| &= \left|(a+b)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + a\alpha}{a+b}\right)^2\right\} - (a+b)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - a\alpha}{a+b}\right)^2\right\}\right| \\
&= \left|\frac{2a\alpha}{a+b}x\right|
\end{aligned}$$

よって，明線条件は，$\left|\dfrac{2a\alpha}{a+b}x\right| = m\lambda$

縞（明線）の間隔を Δx とすると，$\dfrac{2a\alpha}{a+b}\Delta x = (m+1)\lambda - m\lambda$ より，

$\Delta x = \dfrac{a+b}{2a\alpha}\lambda$



256. プリズムによるふれの角

(1)

直線 DE と直線 GF の交点を H’とすると,

δ は△H’EF の∠H’の外角だから,

$\delta = \angle \mathrm{H'EF} + \angle \mathrm{EFH'} = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r')$

(2)

△AEF の内角の和より, $\alpha + \left(\dfrac{\pi}{2} - r\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

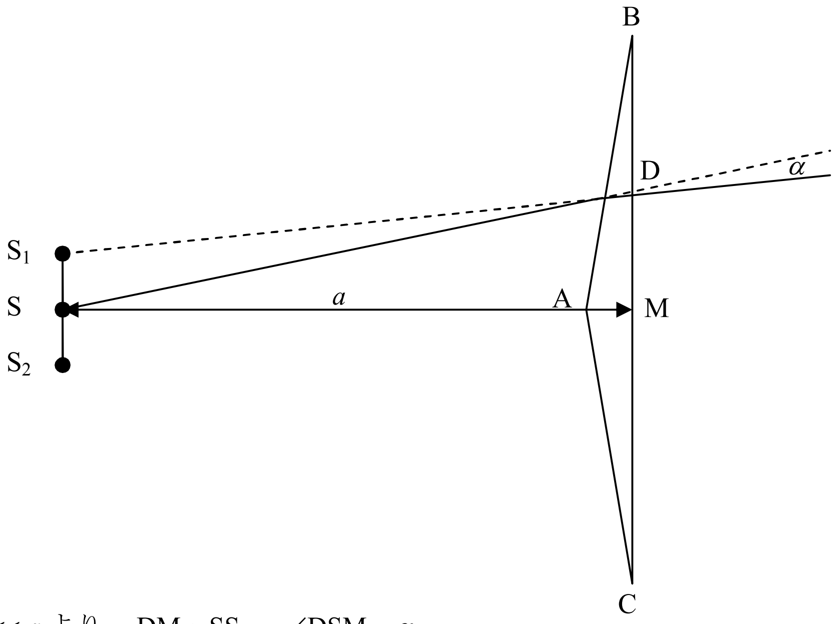
$\therefore \alpha = r + r'$

(3)

$$\begin{aligned}
\delta &= (i + i') - (r + r') \\
&\approx \sin i + \sin i' - \alpha \\
&= n \sin r + n \sin r' - \alpha \\
&\approx nr + nr' - \alpha \\
&= n(r + r') - \alpha \\
&= n\alpha - \alpha \\
&= (n - 1)\alpha
\end{aligned}$$

257. 複プリズムによる干渉

(1)



$\mathrm{DM} << a$ より， $\mathrm{DM} \approx \mathrm{SS_1}$， $\angle \mathrm{DSM} \approx \alpha$

また， $0 < \alpha << 1$ より， $\tan\alpha \approx \alpha$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{S_1S_2} &= 2\mathrm{SS_1} \\ &\approx 2\mathrm{DM} \\ &\approx 2\mathrm{SM}\tan\alpha \\ &= 2a\tan\alpha \\ &\approx 2a\alpha \\ &= 2a(n-1)\theta\end{aligned}$$

(2)

問題 255(3)と同様に，

$$\begin{aligned}\mathrm{S_1P} &= \left\{(a+b)^2 + (x - \mathrm{OS_1}')^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{(a+b)^2 + (x - \mathrm{SS_1})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(a+b)^2 + \{x - a(n-1)\theta\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (a+b)\left[1 + \left\{\frac{x - a(n-1)\theta}{a+b}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx (a+b)\left[1 + \frac{1}{2}\left\{\frac{x - a(n-1)\theta}{a+b}\right\}^2\right] \qquad \left(\because \left\{\frac{x - a(n-1)\theta}{a+b}\right\} << 1\right)\end{aligned}$$

同様に，

$$S_2P \approx (a+b)\left[1+\frac{1}{2}\left\{\frac{x+a(n-1)\theta}{a+b}\right\}^2\right] \qquad \left(\because \left\{\frac{x+a(n-1)\theta}{a+b}\right\} << 1\right)$$

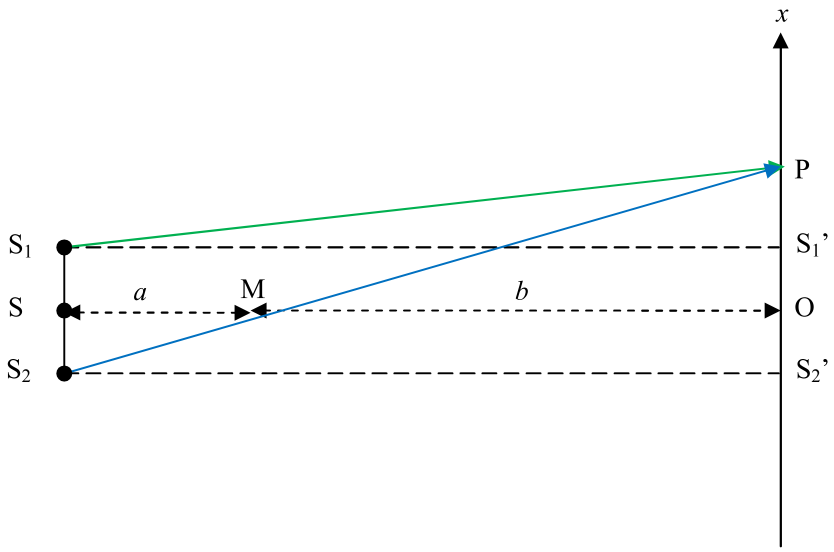
より，$|S_2P - S_1P| = \left|\dfrac{2a(n-1)\theta}{a+b}x\right|$

よって，明線条件は，$\left|\dfrac{2a(n-1)\theta}{a+b}x\right| = m\lambda$

明線の間隔を Δx とすると，

$$\frac{2a(n-1)\theta}{a+b}\Delta x = (m+1)\lambda - m\lambda$$

$$\therefore \Delta x = \frac{a+b}{2a(n-1)\theta}\lambda$$



262．透過型回折格子

スリット幅が十分小さいとき，

各スリット内から 1 個の点波源による光が出ているとしてよい。

光路差が $d\sin\theta = m\lambda$ を満たすとき

λ の周期は 2π だから，光路差 λ と対応する位相差は 0 である。

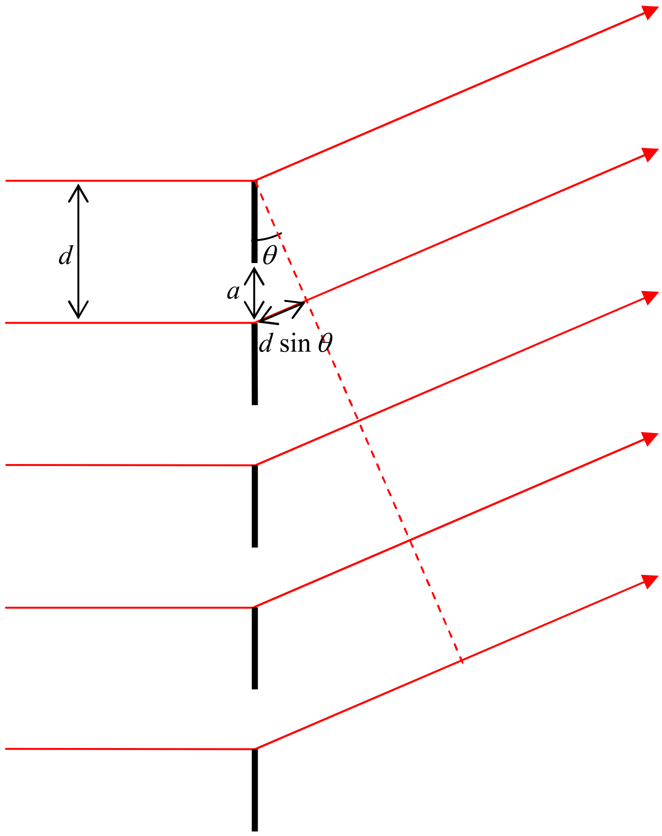
よって，光路差が $d\sin\theta = m\lambda$ を満たすとき，

光路差 $m\lambda$ と対応する位相差は $m\times 0 = 0$ である。

したがって，全スリットからの回折光の波が同位相となり，

波の重ね合わせの原理より，互いに強めあう。

注意：位相は 0 以上 2π 未満の値で表すのが普通である。



光路差が $d\sin\theta' \neq m\lambda$ のとき

隣り合うスリットの対応点からの回折光との光路差は，

実数 $\dfrac{\Delta r}{2}\left(0<\dfrac{\Delta r}{2}<1\right)$ を使って，$d\sin\theta' = \left(m+\dfrac{\Delta r}{2}\right)\lambda$ と表せる。

したがって，あるスリットとその隣のスリットから数えて n 番目のスリットとの間の対応する点からの回折光の光路差は，$nd\sin\theta' = n\left(m+\dfrac{\Delta r}{2}\right)\lambda = nm\lambda + n\Delta r\dfrac{\lambda}{2}$ となる。

このとき位相差は，$n\Delta r\cdot\pi$ であり，

スリット数が非常に多いことから，

$n\Delta r$ が 1 またはその近似値をとるような n が必ず存在する。

よって，$n\Delta r$ が 1 またはその近似値をとるような任意の 2 つの対応点からの回折光は完全にあるいはほぼ完全に打ち消し合うことになる。

これが全スリットにおいて起こるので，

$d\sin\theta = m\lambda$ のときと比べるとはるかに暗くなる。

よって，$d\sin\theta = m\lambda$ を満足する方向だけに明るい像がみられる。

補足

ヤングの実験では，スリットが 2 つしかないので，光の打ち消し合いが十分でない。

したがって，十分暗い暗線ができない。

そのため，$d\sin\theta = m\lambda$ を満たす明線はグラデーションがかかり，鮮明でない。

また，スリット幅を広げると，回折格子としての光の干渉以外に，

スリット内の無数の波源からの光の干渉も加わるので，像がぼやける。

264. 1 つのスリットによる回折

$a\sin\theta = 0$ の光

AB 間に存在するどの点波源をとっても光路差が 0，すなわち位相差が 0 だから，
すべての点波源からのスクリーンに当たる光が強め合う。
よって，明るい。

$a\sin\theta = \lambda$ の光

A からの光と C からの光の光路差は $\dfrac{\lambda}{2}$ だから互いに打ち消し合う。

このとき，AC 間の距離は $\dfrac{a}{2}$ である。

つまり，間隔が $\dfrac{a}{2}$ の関係にある 2 つの点波源からの光は互いに打ち消し合う。

したがって，
AC 間に存在する点波源のうち，A からの距離が Δx の点波源からの光と
CB 間に存在する点波源のうち，C からの距離が Δx の点波源からの光が，
1 対 1 に対応し，互いに打ち消し合うことになるので，
AC 間の全点波源からの光と CB 間の全点波源からの光がすべて打ち消し合う。
よって，暗い。

$a\sin\theta = \dfrac{3}{2}\lambda$ の光

A からの光との光路差が $\dfrac{\lambda}{2}$ の関係の AB 上の点を E,

E からの光との光路差が $\dfrac{\lambda}{2}$ の関係の AB 上の B 側の点を F とすると，

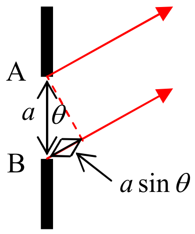
F からの光と B からの光の光路差も $\dfrac{\lambda}{2}$ である。

このとき，上の説明より，AE 間からの光と EF 間からの光または
EF 間からの光と FB 間からの光が互いに打ち消し合う関係にある。

よって，AB の間隔の $\dfrac{1}{3}$ の光だけが残り，スクリーンに当たる。

したがって，やや明るい。

単スリットによる回折のまとめ



光路差$a\sin\theta = m\lambda$ （$m = 1,2,3,\cdots$）のとき

スクリーン上に暗線ができる。

理由

$a\sin\theta = 2m\cdot\dfrac{\lambda}{2}$ より，AB 間を $2m$ 等分し，$2m$ 個の区間に分けると，

隣り合う区間どうしで，光路差が$\dfrac{\lambda}{2}$，つまり位相差でπ となる点波源が

1 対 1 に対応するため，両区間のすべての点波源からの光が打ち消し合う。

区間の数は$2m$ 個，すなわち偶数個あるので，打ち消されないで残る区間はない。

よって，スクリーン上には暗線ができる。

光路差$a\sin\theta = 0$ または$a\sin\theta = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ （$m = 1,2,3,\cdots$）のとき

スクリーン上に明線ができる。

理由

$a\sin\theta = (2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$ より，AB 間を $2m+1$ 等分し，$2m+1$ 個の区間に分けると，

$2m$ 個の区間分の光は打ち消され，1 区間分の光は打ち消されない。

よって，その光により，スクリーン上に明線ができる。

また，明線の明るさは，区間幅$\dfrac{a}{2m+1}$ 相当分の光によるから，

光路差$\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ が大きくなるにしたがい，

つまり，θ が大きくなるにしたがい，弱くなる。

265. 光のドップラー効果

解法 1

光の振動数を f とすると，

静止光源の場合

c [m]あたり f 個の波が存在する。

よって，観測する波長 $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$ ・・・①

観測者に対し速さ v [m/s]で向かっている光源の場合

$c > v$ より，光波は光源と観測者の間に存在する。

$c - v$ [m]あたり f 個の波が存在する。

よって，観測する波長 $\lambda = \dfrac{c - v}{f}$ ・・・②

①，②より，

$$\frac{c-v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}$$

$$\therefore v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} c = \frac{0.10 \times 10^{-10}}{5000 \times 10^{-10}} \times 3.0 \times 10^8 = 6.0 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

よって，6.0km/s

解法 2

観測する振動数を f，光源の振動数を f_0 とすると，

$$f = \frac{c}{c-v} f_0 \quad \therefore \frac{c-v}{c} = \frac{f_0}{f} \quad \cdots ③$$

また，光速度は一定だから，観測する波長を λ，光源の波長を λ_0 とすると，

$$f\lambda = f_0 \lambda_0 \quad \therefore \frac{f_0}{f} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad \cdots ④$$

③，④より，

$$\therefore \frac{c-v}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

$$\therefore v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} c = \frac{0.10 \times 10^{-10}}{5000 \times 10^{-10}} \times 3.0 \times 10^8 = 6.0 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

よって，6.0km/s

267. 超光速度膨張

（イ）

$$\frac{D}{c}$$

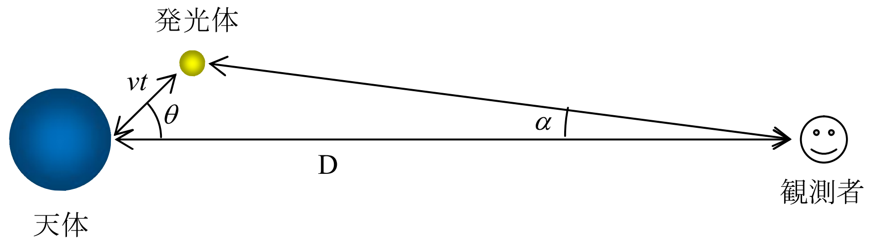
（ロ）

$$\frac{D - vt\cos\theta}{c}$$

解説

発光体は十分遠方にあるから，観測者から見た発光体と天体のなす角 α は 0 としてよい。

よって，発光体と観測者の距離は， $D - vt\cos\theta$



（ハ）

$$t - \frac{vt}{c}\cos\theta$$

（ニ）

$$vt\sin\theta$$

（ホ）

$$\frac{v\sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

解説

発光体が $\Delta t = t - \frac{vt}{c}\cos\theta$ の間に横方向に $\Delta r = vt\sin\theta$ 移動するのを観測者は観測するから，

$$V = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v\sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

（ヘ）

$$\frac{v}{c}$$

(ト)

$$\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

解説

$$\frac{v\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}=v\cdot\frac{\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\leq v\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

(チ)

$$\frac{c}{\sqrt{2}}$$

解説

$\dfrac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}>c$ より，$\dfrac{v}{c}>\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$　$\therefore\left(\dfrac{v}{c}\right)^2>1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$

$\dfrac{v}{c}>0$ より，$\dfrac{v}{c}>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって，$\dfrac{c}{\sqrt{2}}<v<c$

補足

$\dfrac{\sin\theta}{1-k\cos\theta}$　（$0<k<1$）の最大値について

$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-k\cos\theta}$　（$0\leq\theta\leq\pi$，$0<k<1$）とすると，

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta-k}{(1-k\cos\theta)^2}$$

ここで，$\theta=\alpha$ のとき，$\cos\alpha=k$ とすると，$0<k<1$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

また，$0\leq\theta\leq\pi$ において，$\cos\theta$ は単調減少するから，

$0\leq\theta<\alpha$ のとき $\cos\theta-k>0$，$\alpha<\theta\leq\pi$ のとき $\cos\theta-k<0$

よって，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0		α		π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\uparrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	$\downarrow$	0

ゆえに，$\cos\theta=k$ のとき，$f(\theta)$ は最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ をとる。

269. 光路差による縞の移動

(1)

（イ）

A の屈折率を n とし，スクリーン上の点 P（座標 x）の位置に縞が現れたとする。

A→S_1→P と B→S_2→P の光路差は,

$$\left|l+S_2P-(nl+S_1P)\right|=\left|(S_2P-S_1P)-(n-1)\cdot l\right|=\left|\frac{d}{L}x-(n-1)\cdot l\right|$$

よって，明線条件は，$\left|\frac{d}{L}x-(n-1)\cdot l\right|=m\lambda$

$m=0$ のとき，$\frac{d}{L}x-(n-1)\cdot l=0$ より，$x=\frac{(n-1)\cdot lL}{d}>0$

A が真空のとき，$m=0$ となる座標，すなわち点 O の座標は $x=0$ だから,

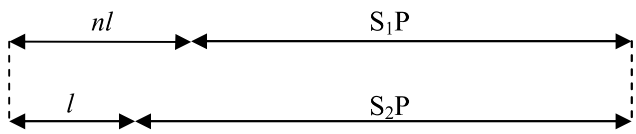
点 O は x 正方向に $x=\frac{(n-1)\cdot lL}{d}$ 動いたことになる。

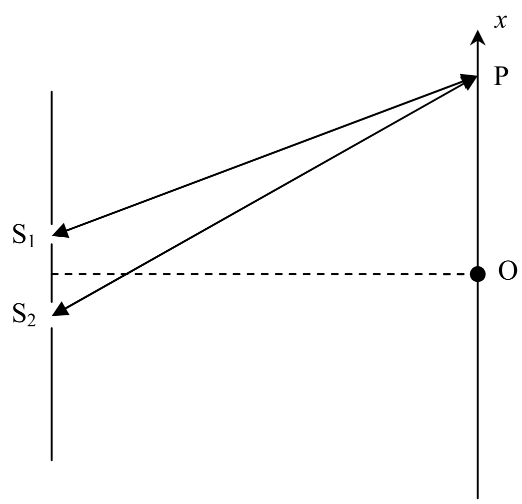
よって，スクリーン上の縞の移動距離も x 正方向に $\frac{(n-1)\cdot lL}{d}$

定性的には,

$m=0$ のときの光路差は 0 だから，下図より，$S_1P<S_2P$ でなければならない。

よって，点 O は x 正方向に動く。





(2)

（ロ）

$x = \dfrac{(n-1)\cdot lL}{d}$　(1)の解説を参照のこと

(3)

（ニ）（ホ）

A と B がいずれも真空のとき

A，B を通過する光の光路差は 0 だから，点 P の座標を $x \geq 0$ とすると，

全光路差＝$S_2P - S_1P = \dfrac{d}{L}x = m\lambda$ （$m = 0,1,2,\cdots$）で与えられる。

したがって，次の明線では，$S_2P - S_1P = \dfrac{d}{L}x = (m+1)\lambda$

A に空気をある圧力まで入れたとき

全光路差＝$m\lambda$ のまま明線が $S_2P - S_1P = \dfrac{d}{L}x = (m+1)\lambda$ を満たす位置に移動する。

全光路差＝B の光学距離＋S_2P の光学距離－（A の光学距離＋S_1P の光学距離）

＝B の光学距離－A の光学距離＋（S_2P の光学距離－S_1P の光学距離）

＝$\lambda - n\lambda + (m+1)\lambda$

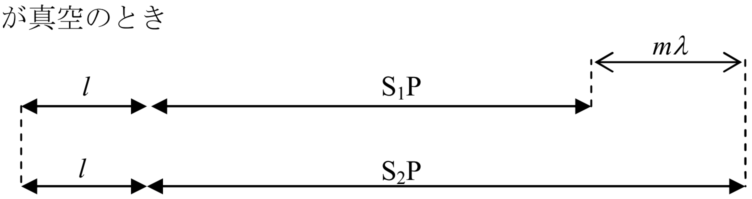
より，$m\lambda = \lambda - n\lambda + (m+1)\lambda$

$\therefore (n-1)\lambda = \lambda$

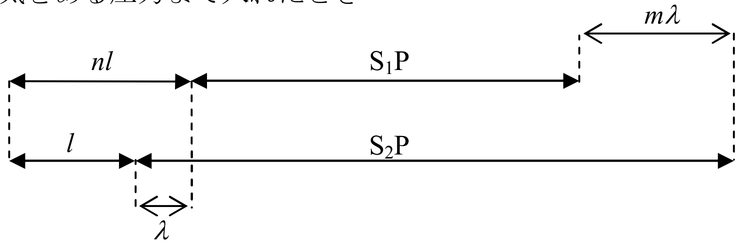
というより，

図で表すと一目瞭然!!

A，B が真空のとき



A に空気をある圧力まで入れたとき



(へ)

比例定数をkとすると，

$n=1+kP$

$P=1$のとき，$n=1.000292$だから，$k=0.000292$

よって，

$n=1+0.000292P$

271．移動鏡による光の反射

入射光線の振動数をf，鏡面で観測される入射光線の振動数をf'，

入射光線の速さの鏡面に垂直な成分をc'とすると，

光のドップラー効果により，$f'=\dfrac{c'+v}{c'}f \quad (c'=c\sin\theta_1)$　・・・①

観測される反射光線の振動数をf''，反射光線の鏡面に垂直な成分をc''とすると，

反射光線の振動数はf'だから，

光のドップラー効果により，$f''=\dfrac{c''}{c''-v}f' \quad (c''=c\sin\theta_2)$　・・・②

①，②より，

$$
\begin{aligned}
f''&=\frac{c''}{c''-v}\cdot\frac{c'+v}{c'}f\\
&=\frac{c\sin\theta_2}{c\sin\theta_2-v}\cdot\frac{c\sin\theta_1+v}{c\sin\theta_1}f\\
&=\frac{\sin\theta_2(c\sin\theta_1+v)}{\sin\theta_1(c\sin\theta_2-v)}f
\end{aligned}
$$

これと$f''=\dfrac{c}{\lambda_2}$，$f=\dfrac{c}{\lambda_1}$より，$\dfrac{c}{\lambda_2}=\dfrac{\sin\theta_2(c\sin\theta_1+v)}{\sin\theta_1(c\sin\theta_2-v)}\dfrac{c}{\lambda_1}$

$\therefore \lambda_2=\dfrac{\sin\theta_1(c\sin\theta_2-v)}{\sin\theta_2(c\sin\theta_1+v)}\lambda_1$　・・・(答)

273. 遠方の2つの光源の分離

(イ)

$$\begin{aligned}\mathrm{L_1S_2P} - \mathrm{L_1S_1P} &= \mathrm{L_1S_2} + \mathrm{S_2P} - (\mathrm{L_1S_1} + \mathrm{S_1P}) \\ &= (\mathrm{L_1S_2} - \mathrm{L_1S_1}) + (\mathrm{S_2P} - \mathrm{S_1P}) \\ &= d\sin\alpha + d\sin\theta \\ &\approx d\alpha + d\theta \\ &= d(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

(ロ)

L_1 から同時に出た光について，光が S_1 を通って点 P で観測される時刻を t

光が S_1 を通って点 P で観測される時刻を t' とすると，光路差が $d(\theta+\alpha)$ だから，

光の速さを c，振動数を f とすると，

$$\begin{aligned}t' &= t + \frac{d(\theta+\alpha)}{c} \\ &= t + \frac{d(\theta+\alpha)}{f\lambda} \\ &= t + \frac{2\pi}{\omega}\frac{d(\theta+\alpha)}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t &= t + \frac{d(\theta+\alpha)}{c} \\ &= t + \frac{d(\theta+\alpha)}{f\lambda} \\ &= t' - \frac{2\pi}{\omega}\frac{d(\theta+\alpha)}{\lambda}\end{aligned}$$

$y_1 = A\sin\omega t$ より，

$$\begin{aligned}y_2 &= A\sin\omega\left\{t' - \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{d(\theta+\alpha)}{\lambda}\right\} \\ &= A\sin\left\{\omega t' - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}\end{aligned}$$

t' を t に書き改めて，

$$y_2 = A\sin\left\{\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}$$

(ハ)・(ニ)

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 &= A\sin\omega t + A\sin\left\{\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\} \\ &= A\left[\sin\omega t + \sin\left\{\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}\right]\end{aligned}$$

ここで，$\omega t = p + q$，$\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda} = p - q$ とおくと，

$y_1 + y_2 = 2A\sin p\cos q$

$p = \omega t - \pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}$，　$q = \pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}$ より，

$y_1 + y_2 = 2A\cos\pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\sin\left\{\omega t - \pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}$

よって，合成波の振幅$=\left|2A\cos\pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right|$

$$\begin{aligned}\therefore I_1 &= k\left|2A\cos\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right|^2\\ &= 4kA^2\cos^2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\\ &= 4kA^2\frac{1+\cos2\pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}{2}\\ &= 2kA^2\left\{1+\cos2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}\end{aligned}$$

$\therefore B = 2kA^2$ ・・・(ハ)，　$\beta = 2\pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}$ ・・・(ニ)

(ホ)・(ヘ)・(ト)

$I_2 = 2kA^2\left\{1+\cos2\pi\dfrac{(\theta-\alpha)d}{\lambda}\right\}$ より，

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2\\ &= 2kA^2\left\{1+\cos2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\} + 2kA^2\left\{1+\cos2\pi\frac{(\theta-\alpha)d}{\lambda}\right\}\\ &= 2kA^2\left\{2+\cos\left(2\pi\frac{\theta d}{\lambda}+2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)+\cos\left(2\pi\frac{\theta d}{\lambda}-2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)\right\}\\ &= 2kA^2\left(2+2\cos2\pi\frac{\theta d}{\lambda}\cdot\cos2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)\\ &= 4kA^2\left(1+\cos2\pi\frac{\theta d}{\lambda}\cdot\cos2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

$\therefore C = 4kA^2$ ・・・(ホ)，　$\gamma = 2\pi\dfrac{\theta d}{\lambda}$ ・・・(ヘ)，　$\delta = 2\pi\dfrac{\alpha d}{\lambda}$ ・・・(ト)

(チ)

$$I = 4kA^2\left(1+\cos 2\pi\frac{\theta d}{\lambda}\cdot\cos 2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right),\quad -1\leq\cos 2\pi\frac{\theta d}{\lambda}\leq 1 \text{ より，}$$

$$I_{\max} = 4kA^2\left(1+\cos 2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$I_{\min} = 4kA^2\left(1-\cos 2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$\therefore V = \left|\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}\right| = \left|\cos 2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right|$$

(リ)

$V=1$ のとき

$$2\pi\frac{\alpha d}{\lambda} = n\pi \quad \therefore d = \frac{n\lambda}{2\alpha}$$

$V=0$ のとき

$$2\pi\frac{\alpha d'}{\lambda} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \therefore d' = \frac{n\lambda}{2\alpha}+\frac{\lambda}{4\alpha}$$

$$\Delta d = d' - d = \frac{n\lambda}{2\alpha}+\frac{\lambda}{4\alpha}-\frac{n\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda}{4\alpha}$$

$$\therefore 2\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta d}$$

274. 透明物体を見る方法

(1)

光路差＝$nd - n_0 d = (n - n_0)d$

$(n - n_0)d : \lambda = \delta : 2\pi$ より，

$$\delta = \frac{2\pi(n - n_0)d}{\lambda}$$

補足

物体に入ったときの背景光の位相をわかりやすさの目的で 0,

物体中の光の波長を λ_1，物体から出るときの光（物体光）の位相を θ_1 とすると，

$$\lambda_1 : d = 2\pi : \theta \quad \therefore \theta_1 = \frac{2\pi d}{\lambda_1}$$

$\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{n}$ より，$\theta_1 = n \cdot \dfrac{2\pi d}{\lambda}$

一方，対応する位置の背景光の位相を θ_0，水中の光の波長を λ_0 とすると，

$$\lambda_0 : d = 2\pi : \theta_0 \quad \therefore \theta_0 = \frac{2\pi d}{\lambda_0}$$

$\lambda_0 = \dfrac{\lambda}{n_0}$ より，$\theta_0 = n_0 \cdot \dfrac{2\pi d}{\lambda}$

図の下の波形のうち物体中の波形を無視すれば，

上と下の波形の左から 3 番目の山の位置から，

光が透明物体を透過することで位相が少し遅れるという解釈が成り立ち，

このときの位相の遅れ $\delta = \theta_1 - \theta_0 = \dfrac{2\pi(n - n_0)d}{\lambda}$

光学距離

波長を真空中の波長 λ に統一すれば位相の比較が楽になる。

そこで，光が屈折率 n の物質中を距離 d 進んだのではなく真空中を進んだと仮定すると，

真空中を進んだ距離は，$n\dfrac{2\pi d}{\lambda} = \dfrac{2\pi \cdot nd}{\lambda}$ より，nd となる。

これを光学距離という。

(2)

δ が非常に小さいと，y と y_0 の差が小さいので，物体光と背景光の明るさの差が小さい。すなわちコントラストが悪い。したがって，物体が良く見えない。

物体光の明るさについて

物体光 $y = A\sin(\omega t - \delta)$ を背景光 y_0 と Δy で表される光波の合成波

すなわち $y = y_0 + \Delta y$ とみなすと，

物体光の明るさは，背景光 y_0 と Δy で表される光波の干渉によるものと解釈できる。

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= y - y_0 \\
&= (y_0 + \Delta y) - y_0 \\
&= A\sin(\omega t - \delta) - A\sin\omega t \\
&= A(\sin\omega t\cos\delta - \sin\delta\cos\omega t) - A\sin\omega t \\
&\approx A(\sin\omega t - \delta\cos\omega t) - A\sin\omega t \\
&= -A\delta\cos\omega t
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
V &= \left|1 - \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle {y_0}^2 \rangle}\right| \\
&= \left|1 - \frac{\langle A^2(\sin^2\omega t - 2\delta\sin\omega t\cos\omega t + \delta^2\cos^2\omega t)\rangle}{\langle A^2\sin^2\omega t\rangle}\right| \\
&= \left|1 - \frac{\frac{1}{2} + \delta^2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right| \\
&= \delta^2
\end{aligned}
$$

$\delta = 0.1$ より，$V = 0.01$

(4)

コントラストを良くするには，背景光を暗くし，物体光を明るくすればよい。

背景光を暗くするには，背景光 y_0 の振幅を小さくするだけでよい。

物体光を明るくするには，物体光の変位 $y = y_0 + \Delta y$ より，

y_0 と Δy が強め合う関係に，すなわち y_0 と Δy が同位相の関係になるようにすればよく，

$\Delta y = -A\delta\cos\omega t = A\delta\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$，　$y_0 = A\sin\omega t$ より，

y_0 の位相を ωt から $\omega t - \frac{\pi}{2}$ にすればよい。つまり，位相を $\frac{\pi}{2}$ だけ遅らせればよい。

(5)

位相を$\frac{\pi}{2}$だけ遅らすための位相板の最小の厚さをd'とすると，

位相板がないときとの光路差は$n'd'-d'=(n'-1)d'$だから，$(n'-1)d':\lambda=\frac{\pi}{2}:2\pi$

よって，$d'=\frac{\lambda}{4(n'-1)}$

(6)

位相板を入れたことによる背景光

$$y_0'=\frac{A}{2}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{A}{2}\cos\omega t$$

位相板をいれたことによる物体光

$$\begin{aligned} y'&=y_0'+\Delta y \\ &=-\frac{A}{2}\cos\omega t-A\delta\cos\omega t \\ &=-\frac{A}{2}(1+2\delta)\cos\omega t \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} V&=\left|1-\frac{\langle y'^2\rangle}{\langle y_0'^2\rangle}\right| \\ &=\left|1-\frac{\left\langle \frac{A^2}{4}(1+2\delta)^2\cos^2\omega t\right\rangle}{\left\langle \frac{A^2}{4}\cos^2\omega t\right\rangle}\right| \\ &=\left|1-(1+2\delta)^2\right| \\ &=4\delta^2+4\delta \end{aligned}$$

$\delta=0.1$より，$V=0.44$