

7. 斜面への斜方投射

(4)

斜面に垂直に衝突する直前の速さを求める。

斜面に垂直に衝突する直前の $v_x = 0$ より、

$$v_x = v_0 \cos \alpha_2 - g \sin \theta \cdot t = 0$$

$$\therefore t = \frac{v_0 \cos \alpha_2}{g \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \alpha_2 - g \cos \theta \cdot t \\ &= v_0 \sin \alpha_2 - g \cos \theta \cdot \frac{v_0 \cos \alpha_2}{g \sin \theta} \\ &= v_0 \sin \alpha_2 - \frac{v_0 \cos \alpha_2}{\tan \theta} \end{aligned}$$

ここで、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ より、 $\tan \theta = 1$

$$\tan \alpha_2 = \frac{1}{2} \text{ と三角比より、} \sin \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって、

$$v_y = v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - v_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

斜面に衝突する直前の速さを v_1 とすると、

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0 + \left(-\frac{v_0}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

はねかえった直後の速さを求める。

はねかえった直後の速さを v_2 とすると、条件より、

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{5}}$$

1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間を(1)で求めた式を使って求める。

(1)で得られた衝突するまでの時間の式 $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$ について、 v_0 は初速度の大きさだから、 v_0 に v_2 を、 α は斜面に対する打ち上げ角度であり、垂直にはねかえるから α に $\frac{\pi}{2}$ を、 θ は斜面の傾斜角だから、 θ に $\frac{\pi}{4}$ をそれぞれ代入すればよい。

よって、求める時間は、
$$\frac{2 \cdot \frac{v_0}{2\sqrt{5}} \sin \frac{\pi}{2}}{g \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{10}v_0}{5g}$$

(5)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t^2 \\ &= \frac{1}{2} g \cos \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{10}v_0}{5g} \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}g}{4} \cdot \frac{10v_0^2}{25g^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g} \end{aligned}$$

あるいは、

(2)の式を使うと、
$$\frac{2v_0^2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right)}{g \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{10} \cdot 1 \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g}$$

値が負だから、Bは斜面にそってAの下方 $\frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g}$ の位置にある。