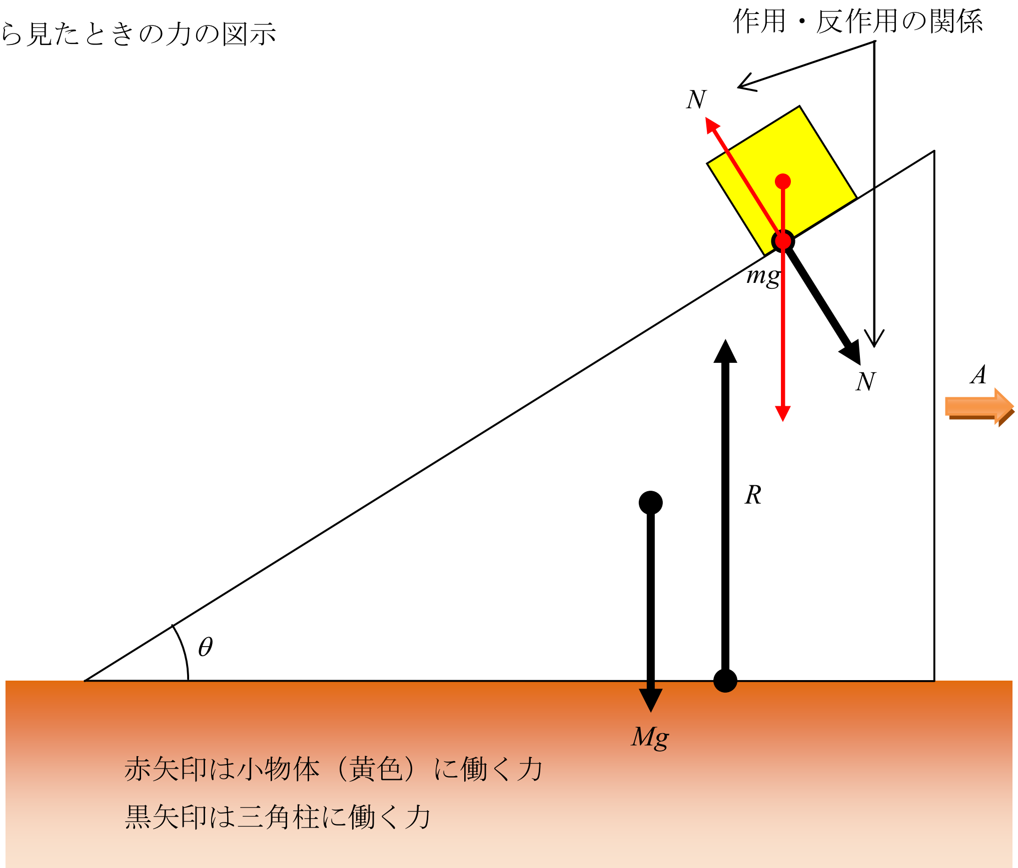
26. 三角柱上の運動と三角柱の運動

床上から見たときの力の図示



三角柱について

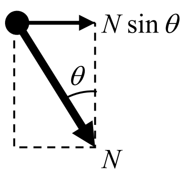
床上の観察者の立場から解く

図より，三角柱は，小物体の斜面に対する垂直抗力の分力 $N\sin\theta$ により，

大きさ A の加速度で水平方向右向きにすべりだす。

このときの三角柱の運動方程式は， $MA = N\sin\theta$

$\therefore A = \dfrac{N\sin\theta}{M}$ ・・・**解答(3)**



小物体について

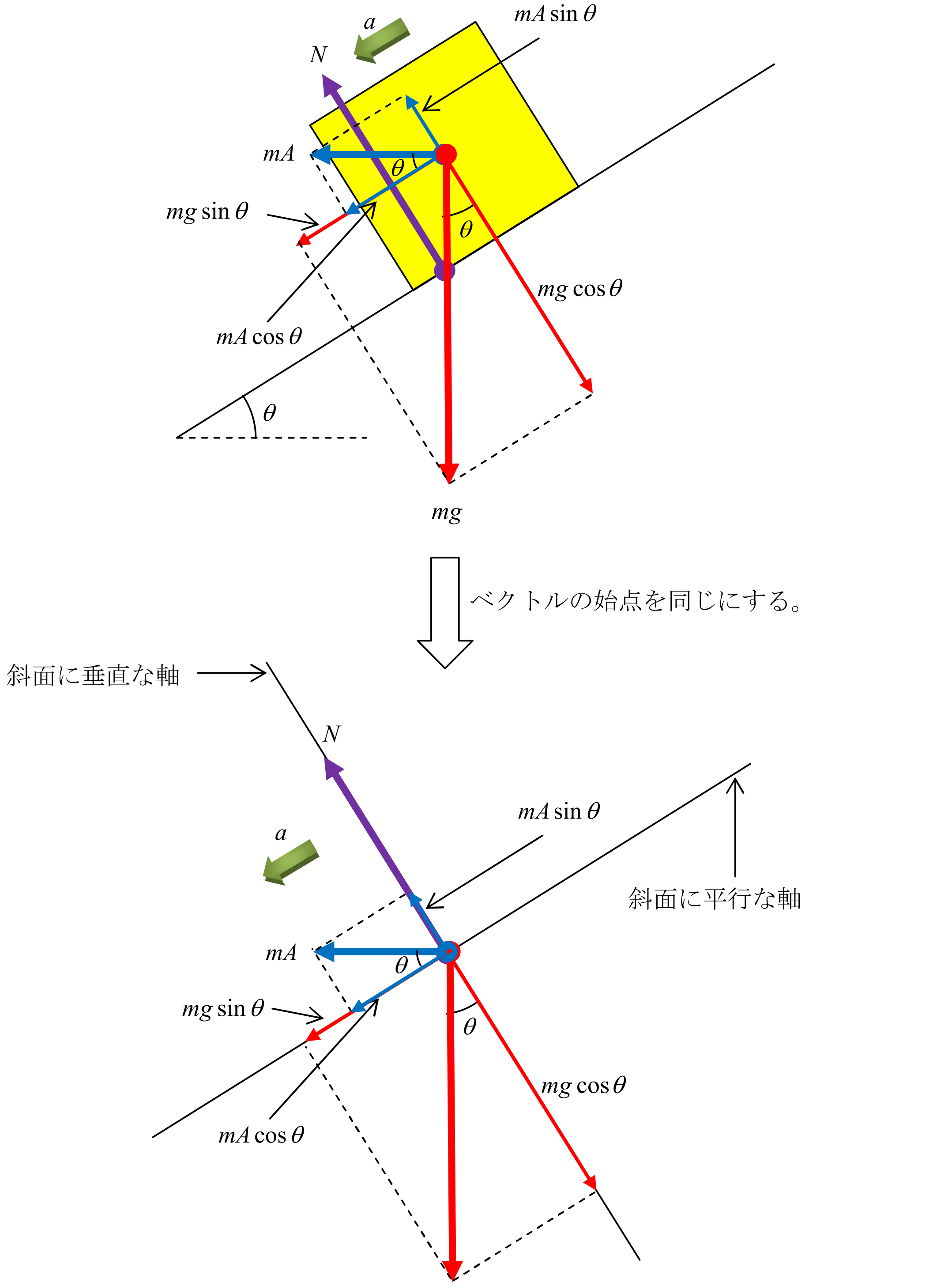
斜面上の観察者の立場から解く

小物体に働く力は，重力，斜面からの垂直抗力，慣性力（幻の力）である。

また，小物体の運動は，斜面に束縛された運動だから，

小物体は重力 mg と慣性力（大きさ mA，水平左向き）のそれぞれの斜面に沿った分力により，

斜面に沿って下向きにすべる。



斜面に沿っての運動方程式

下向きの加速度の大きさをaとすると，

その運動方程式は， $ma = mg\sin\theta + mA\cos\theta$

$\therefore a = g\sin\theta + A\cos\theta$ ・・・**解答(2)**

斜面に垂直な方向の力のつりあい

$N + mA\sin\theta = mg\cos\theta$

$\therefore N = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$ ・・・**解答(1)**

床上の観察者の立場から解く

小物体の加速度の大きさをbとし，その水平成分をb_x，鉛直成分をb_yとすると，

次ページの図より，

水平方向の運動方程式： $mb_x = N\sin\theta$

鉛直方向の運動方程式： $mb_y = mg - N\cos\theta$

よって，

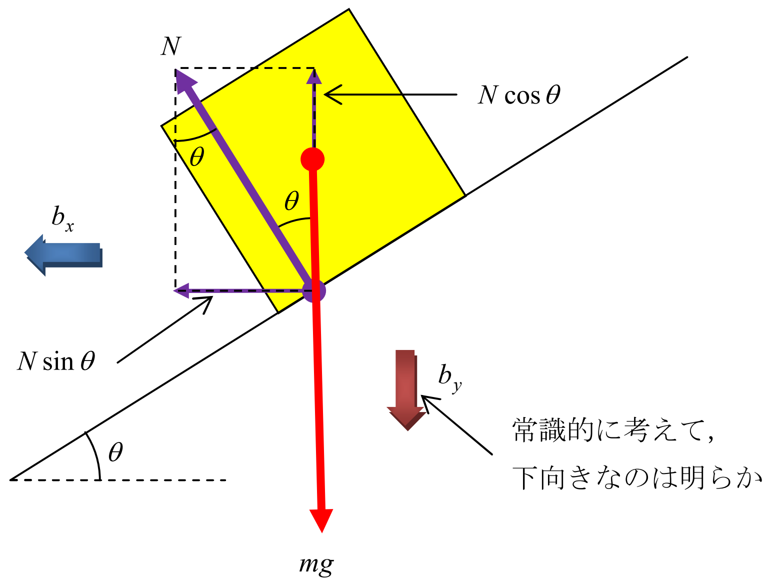
$$b_x = \frac{N\sin\theta}{m}, \quad b_y = \frac{mg - N\cos\theta}{m}$$

ここで，

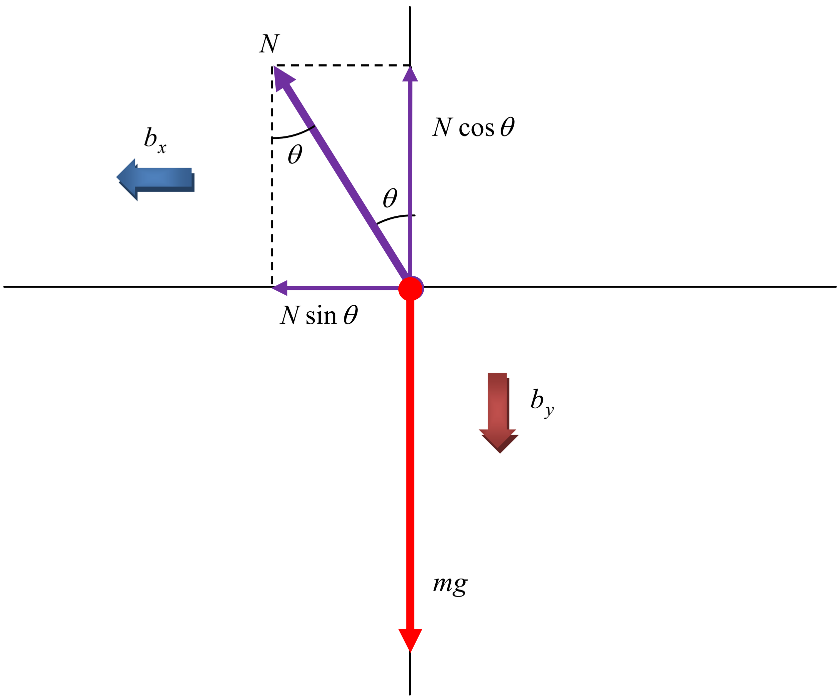
水平方向は左向きを正，鉛直方向は下向きを正とし，

小物体の加速度を成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{N\sin\theta}{m} \\ \dfrac{mg - N\cos\theta}{m} \end{pmatrix}$$



ベクトルの始点を同じにする。



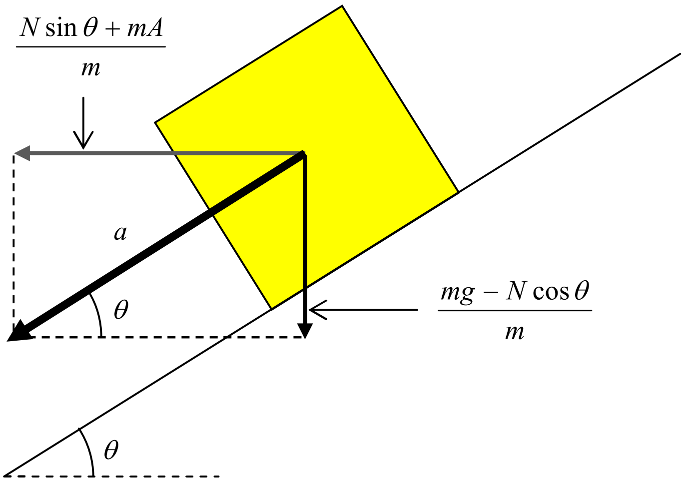
次に，三角柱の加速度を成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，三角柱の斜面上の観察者から見た加速度の成分表示は，

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{N\sin\theta}{m} - (-A) \\ \dfrac{mg - N\cos\theta}{m} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{N\sin\theta + mA}{m} \\ \dfrac{mg - N\cos\theta}{m} \end{pmatrix}$$

三角柱の斜面上の観察者から見た小物体は斜面に沿って下向きにすべるから，
その傾きの大きさは斜面の傾きθと同じである。



よって，

$$\frac{\dfrac{mg - N\cos\theta}{m}}{\dfrac{N\sin\theta + mA}{m}} = \tan\theta$$

$$\frac{mg - N\cos\theta}{N\sin\theta + mA} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$(mg - N\cos\theta)\cos\theta = (N\sin\theta + mA)\sin\theta$$

$$mg\cos\theta - N\cos^2\theta = N\sin^2\theta + mA\sin\theta$$

$$N(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$$

ゆえに，斜面から受ける垂直抗力の大きさNは，

$\therefore N = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$　・・・**解答(1)**

また，三角柱の斜面上の観察者から見た小物体の加速度の大きさaは，

$$a\sin\theta=\frac{mg-N\cos\theta}{m}$$

$$a\sin\theta=\frac{mg-m(g\cos\theta-A\sin\theta)\cos\theta}{m}$$

$$a\sin\theta=g-(g\cos\theta-A\sin\theta)\cos\theta$$

$$a\sin\theta=g-g\cos^2\theta+A\sin\theta\cos\theta$$

$$a\sin\theta=g(1-\cos^2\theta)+A\sin\theta\cos\theta$$

$$a\sin\theta=g\sin^2\theta+A\sin\theta\cos\theta$$

$\therefore a=g\sin\theta+A\cos\theta$　・・・**解答(2)**

補足

運動量保存則

水平方向右向きを正とすると，

床上から見た小物体と三角柱の運動方程式は，

それぞれ，

$-mb_x=-N\sin\theta$　・・・①

$MA=N\sin\theta$　・・・②

①＋②より，

$MA-mb_x=0$

$\therefore MA+m(-b_x)=0$

両辺に運動開始後の時間tをかけると，

$MAt+m(-b_xt)=0$

ここで，

At，$-b_xt$は時間tにおけるそれぞれの速度を表すから，

$At=V_t$，$-b_xt=v_t$とおくと，

$MV_t+mv_t=0$

物体の質量とその速度の積をその物体の運動量と呼び，

$t=0$のとき，$V_t=v_t=0$だから，

運動開始時の両物体の運動量の和は0である。

結論から言うと，

$MV_t+mv_t=0$であることは，運動開始時の運動量が保存されていることを示している。

運動量保存則とは，

複数の物体の運動量の原因が垂直抗力など，物体間の作用・反作用の力のみのとき，

それらの運動量の和が保存されるという法則である。