33. 空気の抵抗がある物体の運動

図 **2** の曲線の方程式の一般解を求めてみよう

運動方程式： $Ma = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta - kv$

加速度 $a = \dfrac{dv}{dt}$ より，

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta - kv$$

$$M\frac{dv}{dt} = -k\left(v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{M}\left(v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}\right)$$

$$\frac{dv}{v + \dfrac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}} = -\frac{k}{M}dt$$

よって，

$$\int \frac{dv}{v + \dfrac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}} = \int -\frac{k}{M}dt$$

$v + \dfrac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} > 0$ より，

$$\log\left(v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}\right) = -\frac{k}{M}t + C \quad （C \text{ は積分定数}）$$

$$v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} = e^{-\frac{k}{M}t + C}$$

$$\therefore v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} = e^{C}\cdot e^{-\frac{k}{M}t} \quad \cdots ①$$

$t = 0$ のとき $v = 0$ より，

$$0 + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} = e^{C}\cdot e^{0}$$

$$\therefore e^{C} = \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\therefore v + \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k} = \frac{\mu' Mg\cos\theta - Mg\sin\theta}{k}\cdot e^{-\frac{k}{M}t}$$

ゆえに，図 2 の曲線の方程式の一般解は，

$$v=\frac{Mg\sin\theta-\mu' Mg\cos\theta}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{M}t}\right)$$

また，

$t\to\infty$ のとき，$e^{-\frac{k}{M}t}\to 0$ だから，

$$\lim_{t\to\infty}v=\frac{Mg\sin\theta-\mu' Mg\cos\theta}{k}$$

実際，

$\theta=30^\circ$，$\mu'=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，$\lim_{t\to\infty}v=4$ を上式に代入すると，

$$4=\frac{Mg\sin 30^\circ-\mu' Mg\cos 30^\circ}{k}$$

$$k=\frac{Mg}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore k=\frac{1}{12}Mg \quad ・・・(5)の答$$

となる。