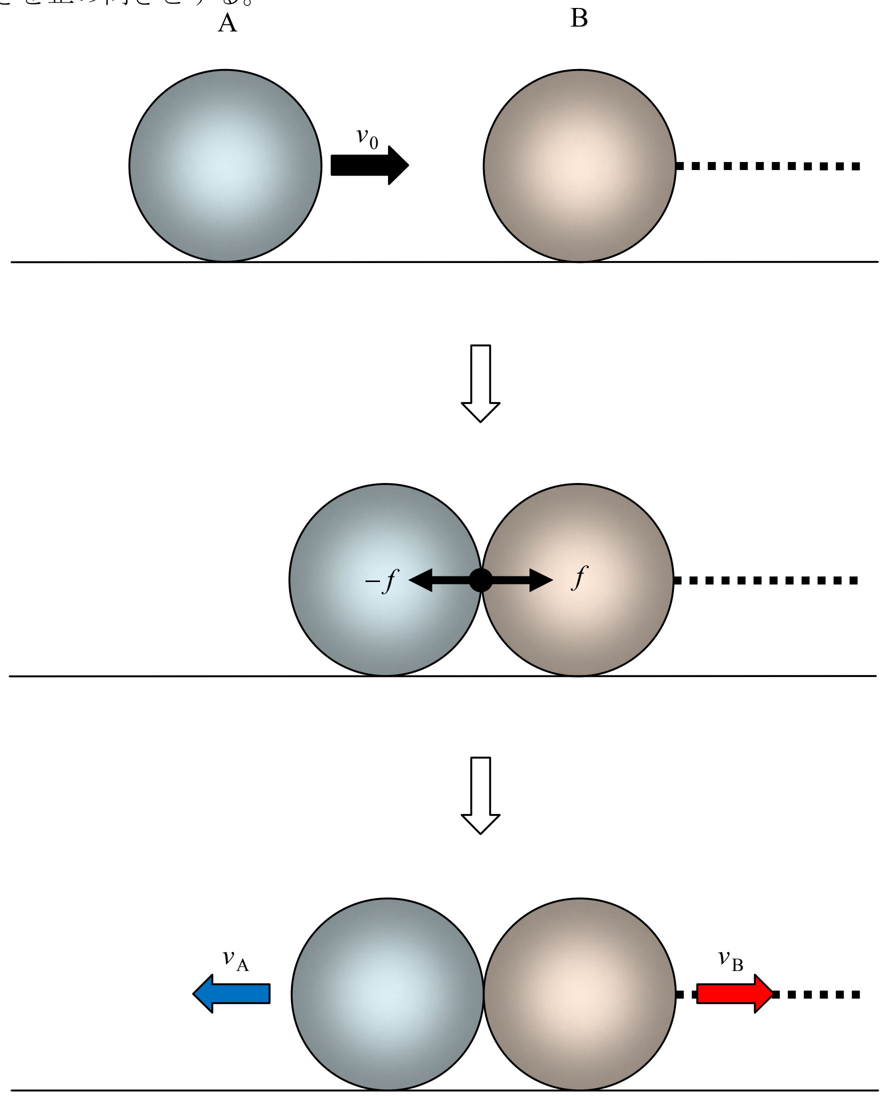
35.　ばねにつながれた小球との衝突

(1)

衝突時の運動方程式から運動量へ

右向きを正の向きとする。



衝突時の物体 A の運動方程式

加速度を a_A とすると，$ma_A=-f$　・・・①

衝突時の物体 B の運動方程式

加速度を a_B とすると，$ma_B=f$　・・・②

①＋②より，

$ma_A+ma_B=0$　・・・③

衝突時間をΔtとすると，

$$a_{\mathrm{A}}=\frac{v_{\mathrm{A}}-v_0}{\Delta t}\quad\cdots④$$

$$a_{\mathrm{B}}=\frac{v_{\mathrm{B}}-0}{\Delta t}\quad\cdots⑤$$

③，④，⑤より，

$$m\times\frac{v_{\mathrm{A}}-v_0}{\Delta t}+m\times\frac{v_{\mathrm{B}}-0}{\Delta t}=0$$

$$\therefore v_{\mathrm{A}}+v_{\mathrm{B}}=v_0\quad\cdots⑦$$

補足

$m\times\frac{v_{\mathrm{A}}-v_0}{\Delta t}+m\times\frac{v_{\mathrm{B}}-0}{\Delta t}=0$ のmを残し，整理すると，

運動量保存を表す式：$mv_{\mathrm{A}}+mv_{\mathrm{B}}=mv_0$　が得られる。

よって，

運動量が保存されるのは，

運動量変化の原因となる力が両物体の作用・反作用の力であるときである。

「エネルギーと仕事」と同じく，「運動量保存と力積」も物理問題を楽に解く手段であるので，

運動系をうまく選び，運動量保存則を使えるようにするのが複雑な問題を解くコツとなる。

反発係数eより，

$$\frac{v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}}{v_0-0}=-e$$

$$\therefore v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}=-ev_0\quad\cdots⑧$$

⑦，⑧より，

$$v_{\mathrm{A}}=\frac{1-e}{2}v_0,\quad v_{\mathrm{B}}=\frac{1+e}{2}v_0\quad\cdots(答)$$

反発係数と相対速度

衝突直前の 2 物体の速度を v_1， v_2

衝突直後の 2 物体の速度を $v_1{}'$， $v_2{}'$

とすると，

反発係数 $e=-\dfrac{v_1{}'-v_2{}'}{v_1-v_2}$ $\left(\text{あるいは,}-e=\dfrac{v_1{}'-v_2{}'}{v_1-v_2}\right)$ （$0\le \boldsymbol{e}\le 1$）

ここで， v_1-v_2 と $v_1{}'-v_2{}'$ は相対速度を表しているから，

反発係数 $e=-\dfrac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}}$ （$0\le \boldsymbol{e}\le 1$）

と覚えるほうが便利である。

注意

斜め衝突では，衝突直前と直後の速度をそのまま反発係数の公式にあてはめてはいけない。

反発係数に使える速度は，

衝突面に対し垂直な速度成分（正面衝突の速度成分）だけである。

(2)

失われた運動エネルギーとは？

質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

運動量が保存される≡重心の運動エネルギーが保存される

より，失われた運動エネルギーは，質点系の重心から見た運動エネルギーである。

では，これを確かめてみよう。

重心からみた質点の運動エネルギーの和（衝突前）

衝突前の重心の速度 $v_{\mathrm{G}}=\dfrac{mv_0+m\cdot 0}{m+m}=\dfrac{v_0}{2}$ より，

衝突前の重心から見た物体 A と物体 B の速度をそれぞれ v_{GA}， v_{GB} とすると，

$$v_{\mathrm{GA}}=v_0-v_{\mathrm{G}}=v_0-\frac{v_0}{2}=\frac{v_0}{2}$$

$$v_{\mathrm{GB}}=0-v_{\mathrm{G}}=0-\frac{v_0}{2}=-\frac{v_0}{2}$$

よって，衝突前の重心から見た質点の運動エネルギーの和は，

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{GA}}{}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{GB}}{}^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2=\frac{mv_0{}^2}{4}\quad\cdots⑨$$

重心からみた質点の運動エネルギーの和（衝突直後）

$$衝突直後の重心の速度\ v_{\mathrm{G}}'=\frac{mv_{\mathrm{A}}+mv_{\mathrm{B}}}{m+m}=\frac{v_{\mathrm{A}}+v_{\mathrm{B}}}{2}=\frac{\frac{1-e}{2}v_0+\frac{1+e}{2}v_0}{2}=\frac{v_0}{2}\ より，$$

（つまり，「運動量が保存される⇔重心が静止または等速度運動をする」）

衝突直後の重心から見た物体 A と物体 B の速度をそれぞれ v_{GA}'， v_{GB}' とすると，

$$v_{\mathrm{GA}}'=v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{G}}'=\frac{1-e}{2}v_0-\frac{v_0}{2}=-\frac{e}{2}v_0$$

$$v_{\mathrm{GB}}'=v_{\mathrm{B}}-v_{\mathrm{G}}'=\frac{1+e}{2}v_0-\frac{v_0}{2}=\frac{e}{2}v_0$$

よって，衝突直後の重心から見た質点の運動エネルギーの和は，

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{GA}}'^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{GB}}'^2=\frac{1}{2}m\left(-\frac{e}{2}v_0\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{e}{2}v_0\right)^2=\frac{me^2v_0{}^2}{4}\quad\cdots⑩$$

⑨，⑩より，

重心から見た質点の運動エネルギーの和の変化は，

⑩－⑨より，

$$\frac{me^2v_0{}^2}{4}-\frac{mv_0{}^2}{4}=-\frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

これは，(2)の答と一致する。

運動量保存と運動エネルギー保存について

質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

証明

重心の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{X}$， $\vec{V}$

質点の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{x}_i$， $\vec{v}_i$ で表すと，

$$\vec{X}=\frac{\sum m_i\vec{x}_i}{M}\quad\left(M=\sum m_i\right)$$

$$\vec{V}=\frac{d\vec{X}}{dt}=\frac{\sum m_i\left(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right)}{M}=\frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$\therefore M\vec{V}=\sum m_i\vec{v}_i\qquad\cdot\cdot\cdot ①$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)^2&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}M\vec{V}+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-M\vec{V}^2+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}\end{aligned}$$

重心から見た質点の運動量の総和は 0 である。

証明

式①より，

$$\sum m_i\vec{v}_i-M\vec{V}=0$$

ここで， $M\vec{V}=\sum m_i\vec{V}$ より，

$$\sum m_i\vec{v}_i-\sum m_i\vec{V}=0$$

$$\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)=0$$

$m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)$は重心から見た質点の運動量を表す。

よって，

重心から見た質点の運動量の総和は 0 である。

質点の運動量の総和が保存される⇔重心の運動エネルギーが保存される

証明

式①の右辺は質点の運動量の総和を表している。

よって，質点の運動量が保存されるとき，$\vec{C}$ を定ベクトルとすると，$\sum m_i\vec{v}_i = \vec{C}$

$M\vec{V} = \sum m_i\vec{v}_i$ より，

$$M\vec{V} = \vec{C}$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{C}}{M}$$

よって，重心の速度 $\vec{V}$ は一定である。

ゆえに，$\frac{1}{2}M\vec{V}^2$ は一定，すなわち重心の運動エネルギーは保存される。

同様に，$\frac{1}{2}M\vec{V}^2$ が一定のとき，$\sum m_i\vec{v}_i$ が一定である。

すなわち質点の運動量の総和は保存される。

補足

「質点の運動エネルギー＝重心の運動エネルギー＋質点の重心に対する相対運動エネルギー」
だから，質点の運動エネルギーが保存されるとき，重心の運動エネルギーも保存される。
重心の運動エネルギーが保存されることと質点の運動量が保存されることは同値だから，
このとき質点の運動量も保存される。
しかし，質点の運動量が保存されても，重心の運動エネルギーは保存されるが，
質点の運動エネルギーが保存されるとは限らない。
つまり，
「質点の運動エネルギーが保存される⇒質点の運動量が保存される」は常に成り立つが，
逆は常には成り立たない。