38. 床や壁との斜めの衝突

(1)

ボールの速度の水平成分は $v_0 \cos 60° = \frac{v_0}{2}$ の等速度運動をするから，

壁に当たるときのボールの速度の水平成分も $\frac{v_0}{2}$ である。

水平方向に対して右斜め下 30°の角度で壁に当たるから，
ボールの鉛直下向きの速さを v_y とすると，

$$\frac{v_y}{\frac{v_0}{2}} = \tan 30°$$

$$\therefore v_y = \frac{v_0}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

よって，鉛直上向きを正とすると，
壁に当たるときのボールの鉛直方向の速度は，

$$-v_y = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

これと，

鉛直方向の速度＝$v_0 \sin 60° - gt = \frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt$ より，

$$\frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g} \quad ・・・（ア）$$

別解：2 次関数の相似性を利用して解く

放物運動だから，ボールの軌道は 2 次関数で表すことができる。

2 次関数同士は相似の関係にあり，その相似比は x^2 の係数の逆数の絶対値の比である。

たとえば， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は， $\left|\dfrac{1}{a}\right|$ ： $\left|\dfrac{1}{b}\right|$ より， $|b|$ ： $|a|$ である。

（ア）別解

水平右向きを始線とすると，

打ち出されたボールの速度の傾きは， $\tan 60°=\sqrt{3}$

壁に当たるときのボールの速度の傾きは， $\tan 150°=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ボールの軌道は $y=-x^2$ と相似だから， $y=-x^2$ に置き換えると，

ボールが打ち出されたときと壁に当たるときの位置の水平成分は，

それぞれ， $y=-x^2$ の接線の傾きが $\sqrt{3}$ ， $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標と対応する。

$y'=-2x$ より，接線の傾きが $\sqrt{3}$ ， $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標をそれぞれ x_1， x_2 とすると，

$$-2x_1=\sqrt{3} \quad \therefore x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-2x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore x_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

頂点の x 座標は 0 だから，

x_1 と頂点の x 座標の距離は $|x_1|$， x_2 と頂点の x 座標の距離は $|x_2|$ であり， $|x_1|$ ： $|x_2|=3$ ： 1

この比は，2 次関数の相似性より，ボールの打ち出し点から最高到達点までの水平距離とボールの最高到達点から壁との衝突点までの水平距離の比が 3:1 であることを示している。

したがって，

打ち出されてから最高点に達するまでの時間を t_1，

最高到達点から壁に当たるまでの時間を t_2 とすると，

ボールの速さの水平成分は $v_0\cos 60°$ だから，

$v_0\cos 60°\cdot t_1$ ： $v_0\cos 60°\cdot t_2=|x_1|$ ： $|x_2|=3$ ： 1

$\therefore t_1$ ： $t_2=3$ ： 1

よって，ボールが打ち出されてから壁に当たるまでの時間 t_1+t_2 は，

$$t_1+t_2=t_1+\frac{1}{3}t_1=\frac{4}{3}t_1 \quad ・・・①$$

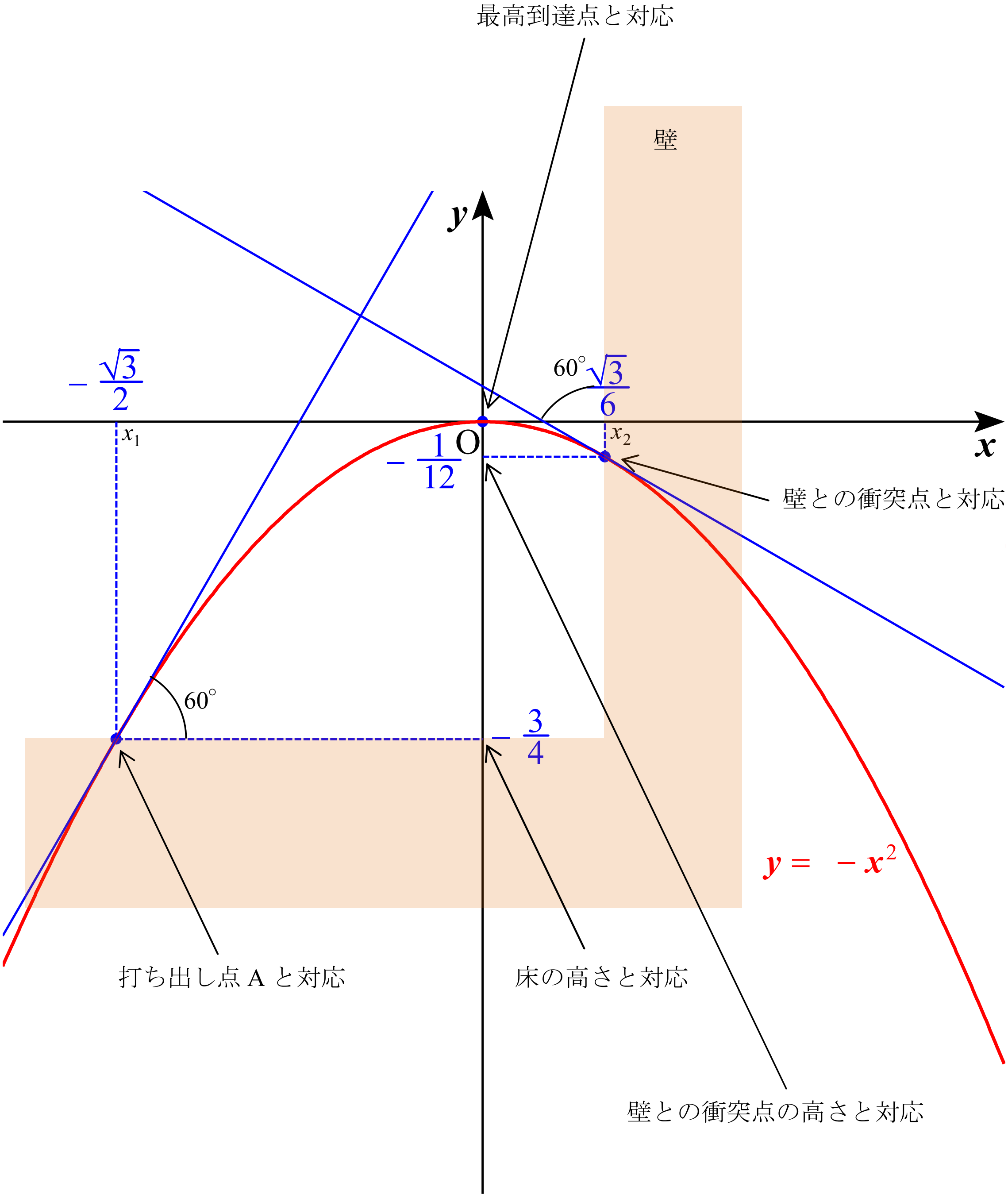
ボールの速度の鉛直成分 $v_0\sin 60°-gt$ が，最高到達点で 0 になることより，

$$v_0\sin 60°-gt_1=\frac{\sqrt{3}v_0}{2}-gt_1=0$$

$\therefore t_1 = \dfrac{\sqrt{3}v_0}{2g}$　　・・・②

①，②より，

$t_1 + t_2 = \dfrac{4}{3}t_1 = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}v_0}{2g} = \dfrac{2\sqrt{3}v_0}{3g}$　　・・・(ア)



(イ)別解

図より，

最高到達点の床からの高さ：壁との衝突点の床からの高さ＝$\frac{3}{4}:\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)$＝9：8

最高到達点の床からの高さをhとすると，

最高到達点では，鉛直方向の速度が 0 になるから，

$0-\left(v_0\sin 60°\right)^2=2\cdot\left(-g\right)\cdot h$ より，$h=\frac{3{v_0}^2}{8g}$

よって，壁との衝突点の床からの高さは，

$\frac{8}{9}h=\frac{8}{9}\cdot\frac{3{v_0}^2}{8g}=\frac{{v_0}^2}{3g}$ ・・・(イ)

(2)

（エ）別解

鉛直方向の速度は壁と平行だから，衝突の影響を受けない。

よって，

最高到達点から床に衝突するまでの時間＝打ち出してから最高到達に達するまでの時間＝t_1

また，（ア）別解の解説より，最高到達点に達してから壁と衝突するまでの時間$t_2=\frac{1}{3}t_1$

よって，壁に衝突してから床に衝突するまでの時間をt_3とすると，

$t_3=t_1-t_2=t_1-\frac{1}{3}t_1=\frac{2}{3}t_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}v_0}{2g}=\frac{\sqrt{3}v_0}{3g}$

速度の水平成分は壁に垂直だから，衝突の影響を受ける。

反発係数eより，衝突後の速度の水平成分の大きさは，

$e\times v_0\cos 60°=\frac{ev_0}{2}$

よって，

1 回目に床に衝突する地点は，

壁から

$\frac{ev_0}{2}t_3=\frac{ev_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}v_0}{3g}=\frac{\sqrt{3}e{v_0}^2}{6g}$ ・・・(エ)

（カ）

補足

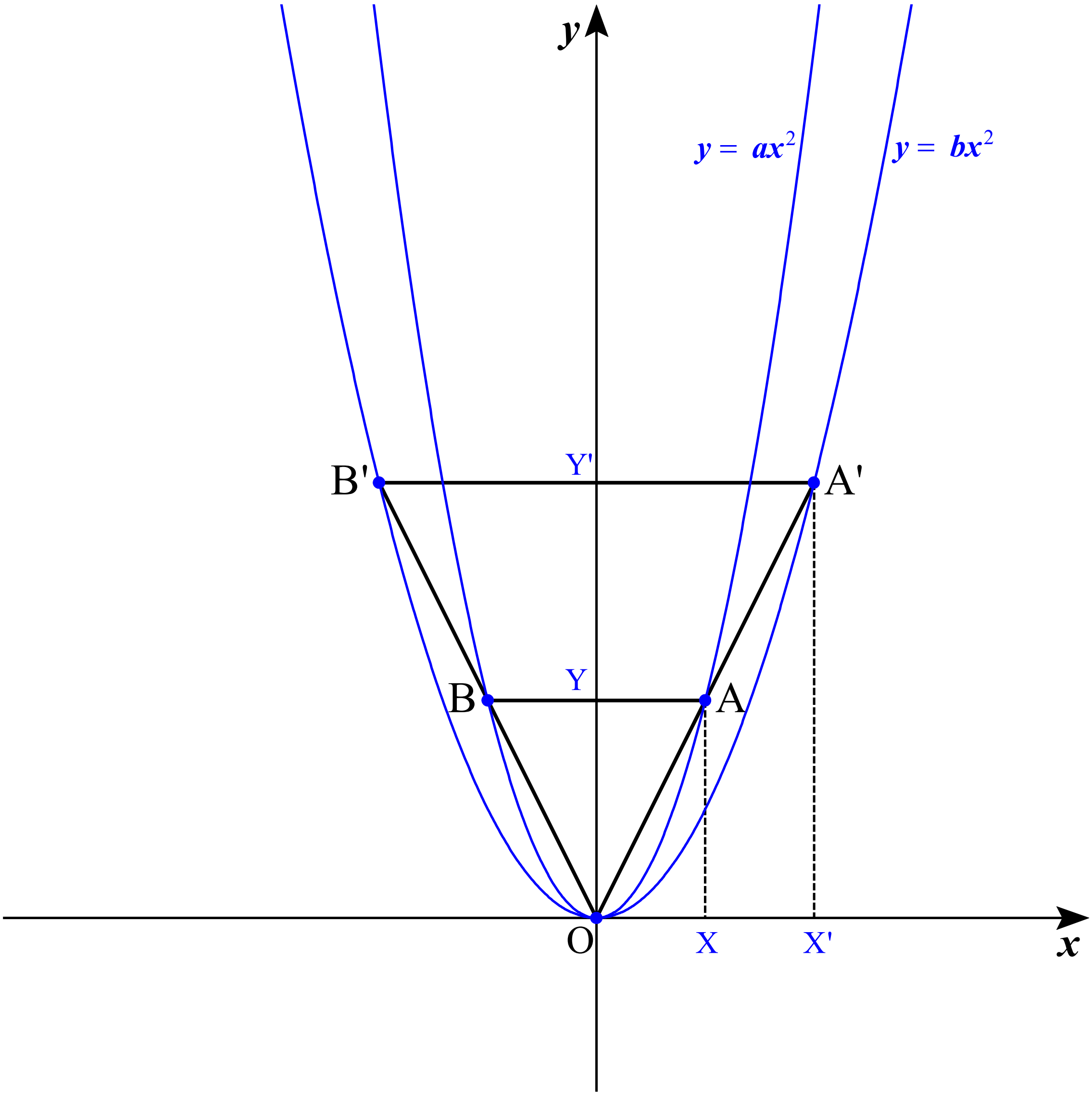
鉛直成分は，鉛直打ち上げ運動だから，高さが同じ点でのボールの速さは等しい。

よって，床に衝突する直前の速さの鉛直成分＝打ち上げ時の速さの鉛直成分

2次関数の相似比と相似中心

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $\left|\frac{1}{a}\right|:\left|\frac{1}{b}\right|=|b|:|a|$ である。

たとえば，$a>0$，$b>0$ の場合



図より，△OAB と△OA'B' の相似比が $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比である。

$y=ax^2$ 上の任意の点を (X,Y) とすると，

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$

両辺を $\frac{a}{b}$ 倍すると，$\frac{a}{b}\mathrm{Y}=\frac{a^2}{b}\mathrm{X}^2$

よって，

$$\frac{a}{b}\mathrm{Y}=b\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}\right)^2$$

これは，$\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}, \frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$ が $y=bx^2$ 上の点であることを示している。

よって，図より，

$(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}, \frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\frac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A' は，$y=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}x$ と $y=bx^2$ との交点より，

$(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')=\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}, \frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}\right)$

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$ より，$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\frac{a\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}}=a\mathrm{X}$，$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\frac{\mathrm{Y}^2}{\frac{\mathrm{Y}}{a}}=a\mathrm{Y}$ だから，

$(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}, \frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\frac{a}{b}$ より $b:a$

別解 2

2 曲線が相似であるということは，一方の曲線を x 軸方向，y 軸方向に等倍に拡大または縮小すると他方の曲線と重なるということになる。

ということは，

△OAB と△OA'B' において，対応する点の接線の傾きは変わらないということになる。

よって，

$y=ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2b\mathrm{X}'$

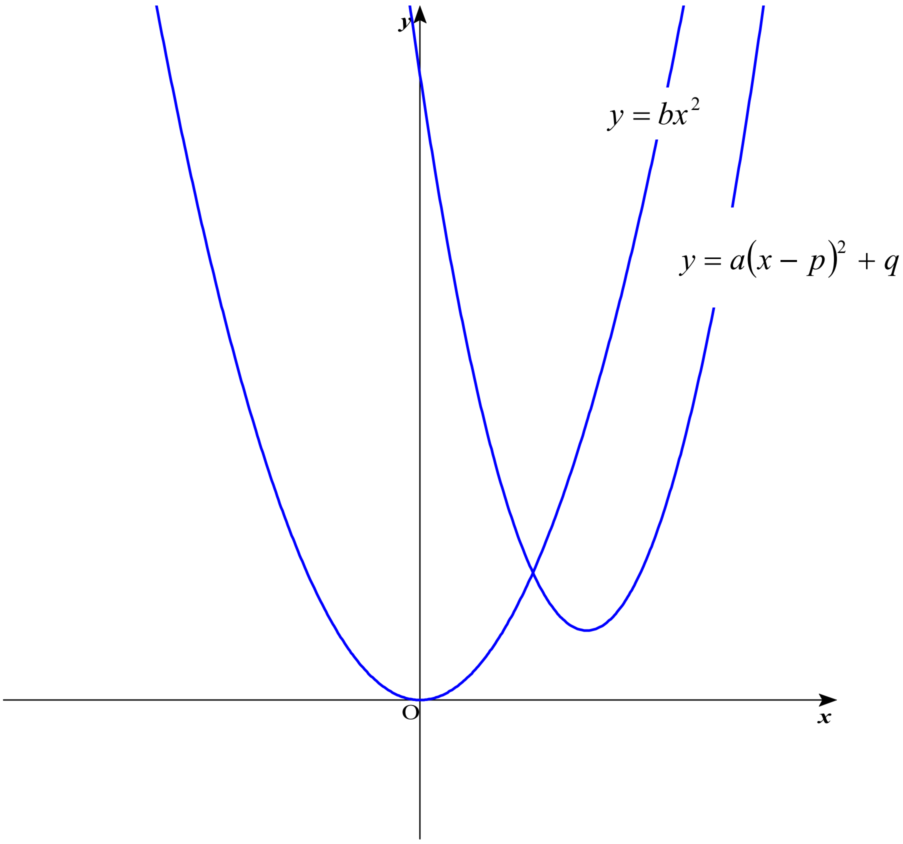
より，$2a\mathrm{X}=2b\mathrm{X}'$

$\therefore \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\frac{a}{b}\left(=\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right)$

すなわち，$y=bx^2$ は，$y=ax^2$ を $\frac{a}{b}$ 倍に拡大したものである。

$y=ax^2 : y=bx^2 =1:\frac{a}{b}=b:a$

$y=a(x-p)^2+q$ と $y=bx^2$ の相似中心の求め方



対応する 2 点の交点が相似中心である。
別解 2 より，対応する点の接線の傾きは等しい。
したがって，頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上に相似の中心があり，
この直線と接線の傾きが等しい頂点でない任意の 2 点を通る直線との交点から
相似中心が求められる。
あるいは,
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=bx^2$ の相似比は $b:a$ かつ頂点は対応する 2 点であるから,
相似中心を (α,β) とおいて,
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=bx^2$ の頂点の相似中心からの距離の x 成分または y 成分の比＝$b:a$
を使うことにより，相似中心 (α,β) が求められる。