

42. 2 小球の衝突と速度の x 成分の変化

(2)

運動エネルギーは、成分に分けることができる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$$

このうち、衝突するのは速度の x 成分だから、衝突の度に失われていく力学的エネルギーは、運動エネルギーの x 成分である。

(速度の y 成分は壁と平行だから、衝突の影響を受けない)

(4)

キ

小球 A と小球 B との N 回目の衝突が起こるときとは、

壁との衝突を含めると、 $2N - 1$ 回目の衝突が起こるときである。

壁との衝突を含めた回数について、 $n - 1$ 回目から n 回目の衝突までの時間を t_n とすると、 n 回目の衝突後の小球の速さは n 回目の衝突後の e 倍になるから、

n 回目から $n + 1$ 回目の衝突までの時間 t_{n+1} は、 t_n の $\frac{1}{e}$ 倍になる。

よって、 $t_{n+1} = \frac{1}{e}t_n$ より、 $t_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} t_1$

ゆえに、 $2N - 1$ 回目の衝突が起こるのにかかった時間は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N-1} t_k &= t_1 \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} \\ &= t_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{2N-1}}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= t_1 \cdot \frac{1 - e^{-2N+1}}{1 - e^{-1}} \\ &= t_1 \frac{e - e^{-2N+2}}{e - 1} \\ &= \frac{e^{2-2N} - e}{e - 1} \cdot t_1 \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(5)

ケ

キの解説より,

 n 回目から $n+1$ 回目の衝突までの時間 $t_{n+1} = \frac{1}{e} t_n$ ($n=1,2,\dots$)また, 衝突の度に速度は $-e$ 倍になる。 $e=0.5$ より,

0 回目の衝突から 1 回目の衝突まで

かかった時間: t_1 速度: $-3v$

1 回目の衝突から 2 回目の衝突まで

かかった時間: $\frac{1}{0.5} t_1 = 2t_1$ 速度: $1.5v$

2 回目の衝突から 3 回目の衝突まで

かかった時間: $\frac{1}{0.5} t_2 = 4t_1$ 速度: $-0.75v$

よって,

 $0 \leq t \leq t_1$ のとき, 速度: $-3v$ $t_1 \leq t \leq 3t_1$ のとき, 速度: $1.5v$ $3t_1 \leq t \leq 7t_1$ のとき, 速度: $-0.75v$ これを, $0 \leq t \leq 5t_1$ の範囲で図示すればよい。