

42. 2 小球の衝突と速度の  $x$  成分の変化

(2)

運動エネルギーは、成分に分けることができる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$$

このうち、衝突するのは速度の  $x$  成分だから、衝突の度に失われていく力学的エネルギーは、運動エネルギーの  $x$  成分である。

(速度の  $y$  成分は壁と平行だから、衝突の影響を受けない)

(4)

キ

小球 A と小球 B との  $N$  回目の衝突が起こるときとは、壁との衝突を含めると、 $2N - 1$  回目の衝突が起こるときである。壁との衝突を含めた回数について、 $n - 1$  回目から  $n$  回目の衝突までの時間を  $t_n$  とすると、 $n$  回目の衝突後の小球の速さは  $n$  回目の衝突後の  $e$  倍になるから、 $n$  回目から  $n + 1$  回目の衝突までの時間  $t_{n+1}$  は、 $t_n$  の  $\frac{1}{e}$  倍になる。よって、 $t_{n+1} = \frac{1}{e}t_n$  より、 $t_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} t_1$ ゆえに、 $2N - 1$  回目の衝突が起こるのにかかった時間は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N-1} t_k &= t_1 \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} \\ &= t_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{2N-1}}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= t_1 \cdot \frac{1 - e^{-2N+1}}{1 - e^{-1}} \\ &= t_1 \frac{e - e^{-2N+2}}{e - 1} \\ &= \frac{e^{2-2N} - e}{e - 1} \cdot t_1 \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(5)

ケ

キの解説より,

$$n \text{ 回目から } n+1 \text{ 回目の衝突までの時間 } t_{n+1} = \frac{1}{e} t_n \quad (n=1,2,\dots)$$

また, 衝突の度に速度は  $-e$  倍になる。 $e=0.5$  より,

0 回目の衝突から 1 回目の衝突まで

かかった時間:  $t_1$ 速度:  $-3v$ 

1 回目の衝突から 2 回目の衝突まで

$$\text{かかった時間: } \frac{1}{0.5} t_1 = 2t_1$$

速度:  $1.5v$ 

2 回目の衝突から 3 回目の衝突まで

$$\text{かかった時間: } \frac{1}{0.5} t_2 = 4t_1$$

速度:  $-0.75v$ 

よって,

 $0 \leq t \leq t_1$  のとき, 速度:  $-3v$  $t_1 \leq t \leq 3t_1$  のとき, 速度:  $1.5v$  $3t_1 \leq t \leq 7t_1$  のとき, 速度:  $-0.75v$ これを,  $0 \leq t \leq 5t_1$  の範囲で図示すればよい。