

49. 水平面内の等速円運動

(2)

$$(x, y) = (a \cos(\omega t + \delta), a \sin(\omega t + \delta)) \quad (0 \leq \delta < 2\pi) \text{ とおくと,}$$

 $t = 0$ のとき,

$$(a \cos \delta, a \sin \delta) = (0, a) \text{ より,}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

よって,

$$x = a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin \omega t$$

$$\omega = \frac{v}{a} \text{ より,}$$

$$x = -a \sin\left(\frac{v}{a} t\right)$$

(3)

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{x} = |\vec{T}| |d\vec{x}| \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ より,}$$

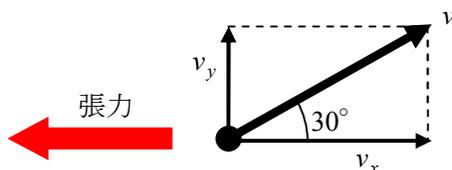
$$\int dW = 0$$

(4)

(b)

物体が点 A から x 軸上の点 P に達する直前までの速度の x 成分と y 成分を v_x, v_y とすると,

$$(v_x, v_y) = (v \cos 30^\circ, v \sin 60^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v, \frac{1}{2} v\right)$$

 x 軸上の点 P に達すると物体は O 方向に張力を受け,これが束縛力となって, 速度の x 成分は 0 となる。一方, y 軸方向には外力を受けないから, 速度の y 成分は変化しない。よって, 点 P に達した直後の物体の速度の x 成分と y 成分は, $\left(0, \frac{1}{2} v\right)$ となり,以後, 半径 $2a$, 速さ $\frac{1}{2} v$ の等速円運動となる。

(c)

$$2a\omega' = \frac{v}{2} \text{ より,}$$

$$\omega' = \frac{1}{4} \cdot \frac{v}{a} = \frac{1}{4} \omega$$

よって, $\frac{1}{4}$ 倍になる。

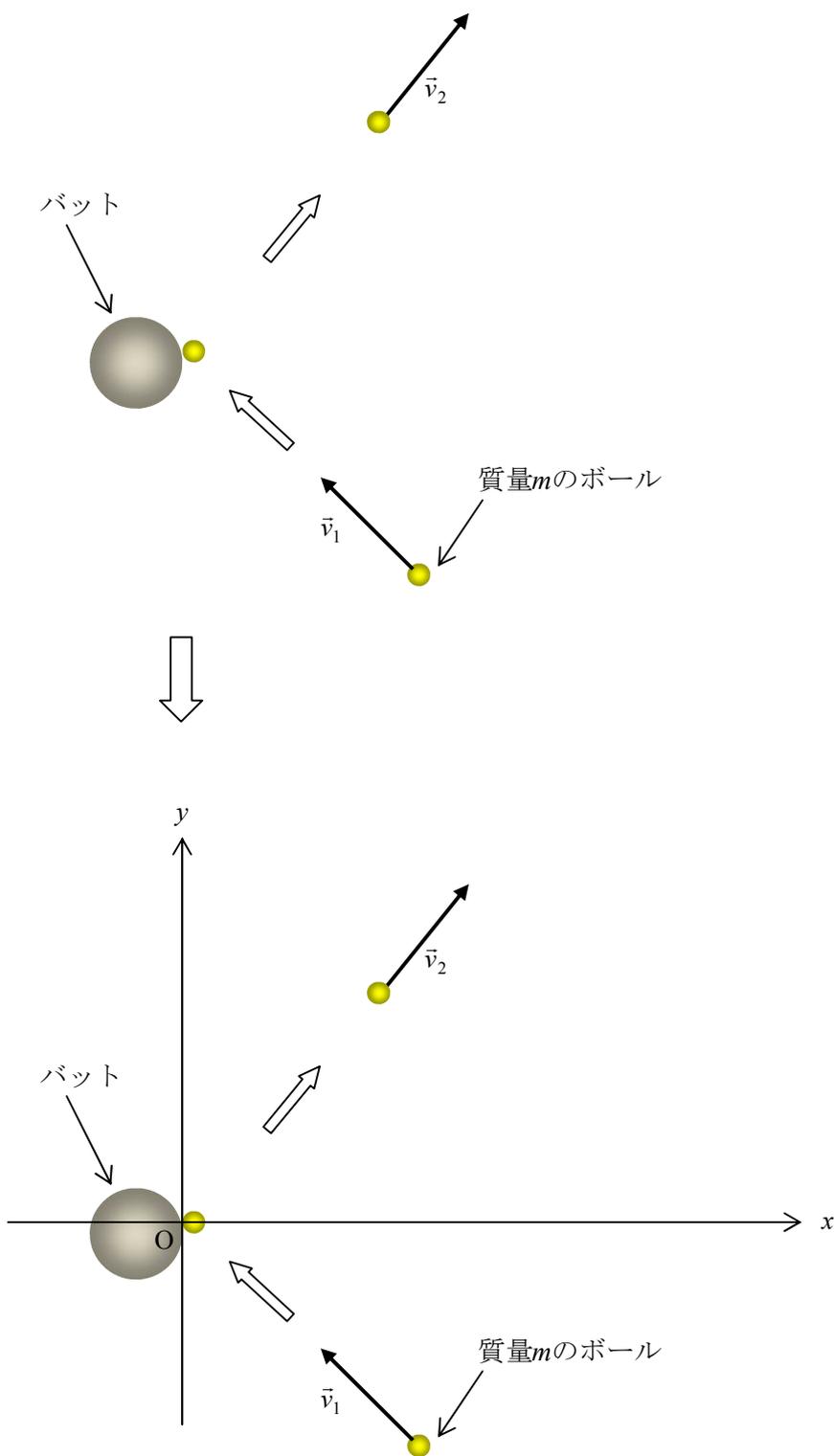
(d)

力積と運動量はベクトルなので, 数ベクトルにしてから, 大きさを求める。

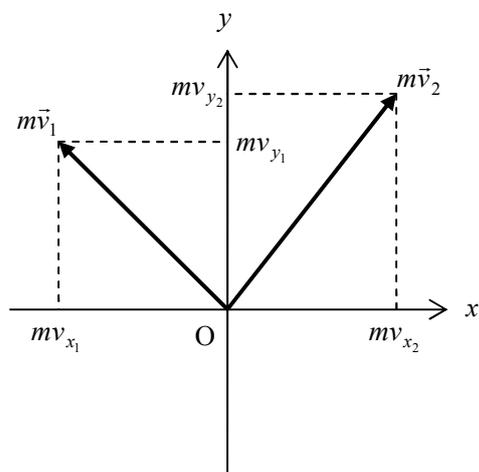
$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v} = m \cdot \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, 受けた力積の大きさ } |\vec{F} \cdot \Delta t| = m \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}mv$$

物体が受けた力積の大きさと向きの求め方



ボールがバットから受けた力積の大きさ



原点 O を始点とする位置ベクトルを xy 座標平面上にとり、
バットに衝突する直前と直後のボールの運動量の xy 成分を数ベクトルで表すと、

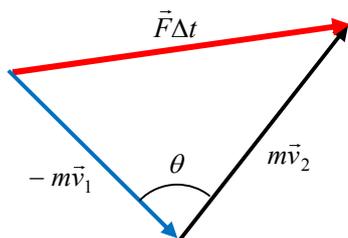
$$m\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} mv_{x_1} \\ mv_{y_1} \end{pmatrix}, \quad m\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} mv_{x_2} \\ mv_{y_2} \end{pmatrix} \text{ だから, 運動量変化は, } \Delta m\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} mv_{x_2} - mv_{x_1} \\ mv_{y_2} - mv_{y_1} \end{pmatrix}$$

よって、ボールが受けた力積の大きさは、

$$|\vec{F}\Delta t| = |m\Delta\vec{v}| = m\sqrt{(v_{x_2} - v_{x_1})^2 + (v_{y_2} - v_{y_1})^2}$$

余弦定理を使う方法もある

$m\vec{v}_1$ と $m\vec{v}_2$ のなす角を θ とすると、 $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t$ は次のように図示できる。

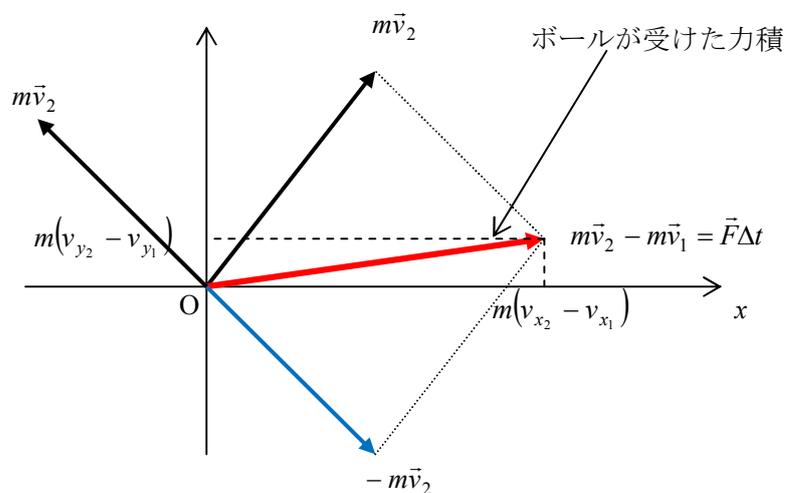


よって、

余弦定理より、

$$|\vec{F}\Delta t| = \sqrt{m^2 v_1^2 + m^2 v_2^2 - 2m^2 v_1 v_2 \cos \theta}$$

ボールが受けた力積の図示



注意

「物体が受けた運動量を求めよ」という問題があるが、これは、「物体が受けた力積を求めよ」という意味である。

(5)

角運動量保存則 (課程外)

質点に作用する力の、点 O のまわりの力のモーメントが 0 であるとき、点 O のまわりの質点の角運動量は変化しない。

とくに、質点が点 O から向心力を受けて運動するときは、質点の O のまわりの角運動量は常に一定、すなわち保存される。

角運動量 (課程外)

質点が原点 O を定点とする位置ベクトル \vec{r} の点で、 \vec{r} と角 θ の方向に、運動量 $m\vec{v}$ で運動するとき、点 O のまわりの質点の角運動量 \vec{L} は、 \vec{r} と $m\vec{v}$ の外積で定義される。

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |m\vec{v}| \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

外積 (課程外)

