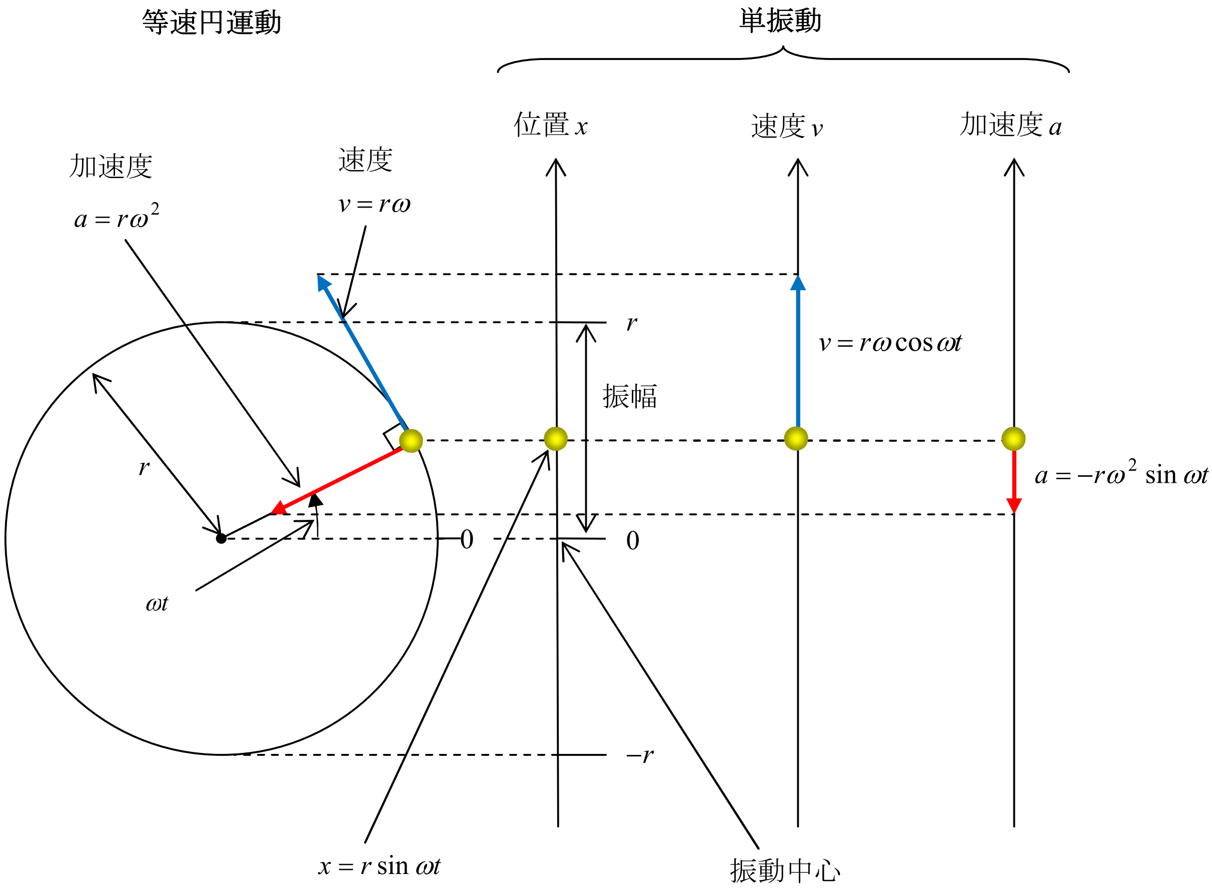
50.　2 本のばねによる単振動

等速円運動と単振動

単振動は等速円運動をしている質点の運動を直線上に投影した運動とみなせる。



回転軌道半径が r の等速円運動を直線上に投影すると，

位置：$x = r\sin\omega t$

　　初期位相（等速円運動開始時（$t = 0$）の角度）が φ ならば，$x = r\sin(\omega t + \varphi)$

速度：$v = r\omega\cos\omega t$

　　初期位相が φ ならば，$v = r\omega\cos(\omega t + \varphi)$

加速度：$a = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$

　　初期位相が φ ならば，$a = -r\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

これらが，単振動している物体の位置，速度，加速度である。

尚，振動中心は，単振動している物体の振動方向にはたらく外力がつり合う位置である。

補足

三角関数の微分を学習済みなら，

初期位相をφ，角速度（角振動数）をωとすると，

$x = r\sin(\omega t + \varphi)$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\sin(\omega t + \varphi)\right) = r\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\omega\cos(\omega t + \varphi)\right) = -r\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

(1)

振動中心$x = 0$，振幅aの単振動だから，初期位相（$t = 0$のときの位相）をφとすると，

$x = a\sin(\omega t + \varphi)$

$v = a\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$t = 0$のとき，$x = 0$，$v = a\omega$だから，

$x = a\sin\varphi = 0$，$v = a\omega\cos\varphi = a\omega$より，$\sin\varphi = 0$，$\cos\varphi = 1$

よって，$\varphi = 0$

また，$t = 0$からの変位は正方向だから，$\omega > 0$

ゆえに，

$x = a\sin\omega t \quad (\omega > 0)$　・・・(答)

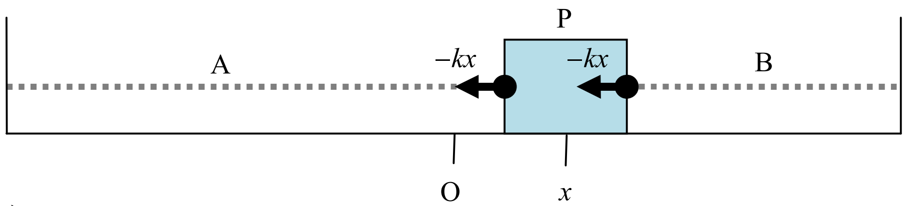
$v = a\omega\cos\omega t \quad (\omega > 0)$　・・・(答)

(2)

$\alpha = -a\omega^2\sin\omega t$

$\quad = -\omega^2 \cdot a\sin\omega t$

$\quad = -\omega^2 x$　・・・(答)



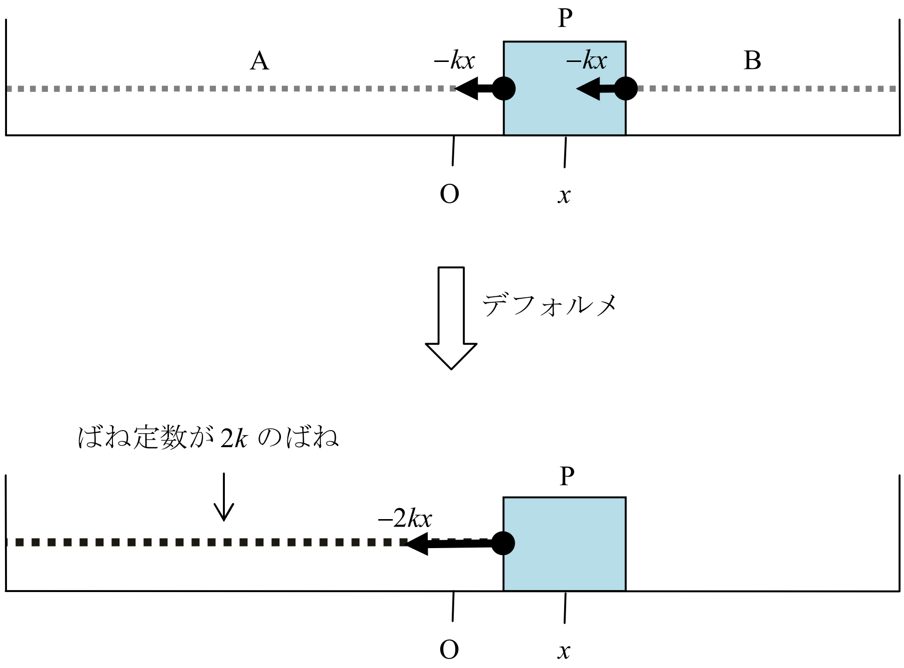
より，

物体 P にはたらく水平方向の外力の和，すなわち 2 つのばね A と B から受ける力は，

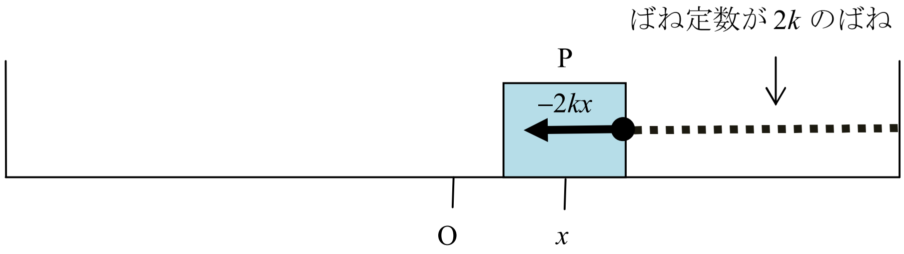
$F = -2kx$　・・・(答)

(3)

図 1 は次のようにデフォルメして考えたほうがわかりやすい。



あるいは,



物体 P の運動方程式は, $m\alpha = F$ だから,

$m \cdot \left(-\omega^2 x\right) = -2kx \quad (\omega > 0)$ より,

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

・・・(答)

補足
物体の運動方程式 $ma = F$ において，
F が位置 x の関数で表されるとき，
この物体の運動は単振動である。

(4)
運動エネルギーの最大値
$|v| = |a\omega\cos\omega t| = a\omega|\cos\omega t| \quad (\because \omega > 0)$ より， $\omega t = n\pi \ (n = 0,1,2,\cdots)$ のとき，
$|v|$ は最大値 $a\omega$ をとる。
よって，

$$K = \frac{1}{2}m\cdot(a\omega)^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = \frac{1}{2}ma^2\cdot\frac{2k}{m} = ka^2$$

また，このときの $x = a\sin\omega t = a\sin(n\pi) = 0$
ゆえに，
$x = 0$ の位置で運動エネルギーは最大値 $K = ka^2$ をとる。　・・・(答)
位置エネルギーの最大値
保存力は，ばねの弾性力のみだから，
位置エネルギーは弾性力による位置エネルギーである。
これと合成ばね定数＝$2k$ より，位置エネルギー＝$\frac{1}{2}(2k)x^2 = kx^2$

$|x| = a|\sin\omega t|$ より， $\omega t = n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n = 0,1,2,\cdots)$ のとき， $|x|$ は最大値 a をとるから，

位置エネルギーの最大値 $U = ka^2$
よって，
$x = \pm a$ の位置で位置エネルギーは最大値 $U = ka^2$ をとる。　・・・(答)