51. あらい面上で振動する物体の運動

テーマ：非保存力と単振動

（カ）

別解

物体 A の振動中心からの変位を X とすると，

物体 A に働く外力 $F=-kX$ であり，これは一種の弾性力とみなせる。

また，$F=-kX$ に非保存力の動摩擦力も含まれているので，

その弾性エネルギー $\frac{1}{2}kX^2$ は非保存力も含んだものである。

したがって，振動中心を基準にすると，非保存力の有無にかかわらず，

次の力学的エネルギー保存則が成り立つ。（詳しくは，p3 からの解説参照のこと）

$$\frac{1}{2}kX^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{一定}$$

$x=5l$ のとき，速さ 0，$X=5l-l=4l$，

$x=l$，すなわち振動中心 $X=0$ での速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$0+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(4l)^2+0 \qquad \therefore v=4l\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ・・・（答）$$

（キ）

周期 *T* の求め方

単振動の周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ は，

「運動方程式からの物体 A の加速度＝単振動を表す三角関数の式からの物体 A の加速度」

から求めることができる。

物体 A の単振動運動方程式からの加速度

PQ 間の物体 A に働く外力の和は $-kx+\mu'mg=-kx+kl=-k(x-l)$ だから，

物体 A の加速度を a とすると，物体 A の運動方程式は $ma=-k(x-l)$

ここで，$x-l=X$ とおくと，$ma=-kX$ となり，

物体 A の運動が単振動運動であることが明確になる。

$$\therefore a=-\frac{k}{m}X \quad ・・・①$$

物体 A の単振動を表す三角関数式からの加速度

振幅を求める必要はないが，より正確な式にする目的で，それも求めてみると，

単振動の振幅＝$5l-l=4l$

初期位相を α とすると，$X=4l\sin(\omega t+\alpha)$

$t=0$ のとき $X=4l$ より，$\sin\alpha=1$　$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{2}$

よって，

$X=4l\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=4l\cos\omega t$

$v=\dfrac{dX}{dt}=-4l\omega\sin\omega t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-4l\omega^2 s\cos\omega t=-\omega^2 X$　・・・②

周期 ***T***

①，②より，$-\omega^2 X=-\dfrac{k}{m}X$

$\therefore \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　$\therefore T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

非保存力がはたらく場合の単振動の力学的エネルギー保存

物理小ネタ「単振動・単振動の力学的エネルギー保存則」より抜粋

1．非保存力が作用しても単振動運動は続く

単振動の原動力は，物体に働く保存力のつり合いの位置からの変位をxとしたとき，
物体に働く保存力の和が$F_0=-Kx$となる力である。
保存力しか働いていないから，これを単振動の保存力としてよい。
質量mの質点が単振動の保存力$F_0=-Kx$をうけて，
運動方程式$ma=-Kx$の単振動運動をしているとする。
ここに，質点の単振動の向きに非保存力fを働かせると，
質点が受ける外力の和$F=F_0+f=-Kx+f=-K\left(x-\dfrac{f}{K}\right)$となる。
ここで，$X=x-\dfrac{f}{K}$とおけば，質点の運動方程式$ma=-KX$が得られる。
これは，$X=0$を振動中心とする質量mの質点の単振動の運動方程式である。
よって，
保存力を受けて単振動運動をしている質点に非保存力が働いても，
振動中心が$x=0$から$x=\dfrac{f}{K}\left(\because x-\dfrac{f}{K}=0\right)$に移動し，
また，振動中心の移動により振幅の大きさも変わるが，
質点の単振動運動そのものは継続する。
これは，非保存力が働いている単振動運動も存在することを示している。

補足

非保存力が動摩擦力のとき（向きが周期的に変化する非保存力のとき）

ばね定数 K のばねにつながれた質量 m の物体が，

動摩擦力 f を受けながら単振動運動する場合を考えてみよう。

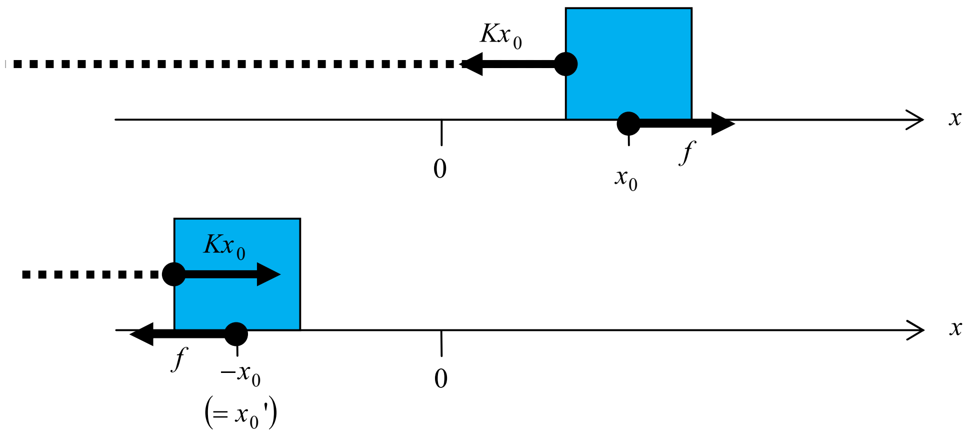
尚，ばねの自然長の位置を $x=0$ とする。

補足 1．振動中心は 2 つある

$x>0$ のとき $F_0=-Kx<0$ より，動摩擦力 $f>0$ $\quad\therefore$ 振動中心 $x_0=\dfrac{f}{K}>0$

$x<0$ のとき $F_0=-Kx>0$ より，動摩擦力 $f<0$ $\quad\therefore$ 振動中心 $x_0{}'=\dfrac{f}{K}<0$

また，単振動の周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ より，振動中心が入れ替わる周期 $=\dfrac{T}{2}=\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$



補足 2．振動中心が入れ替わるたびに振幅が小さくなっていき，質点はやがて静止する。

x 正方向に $x = x_{\max} > x_0$ まで質点が移動したとすると，

$x = x_0$ を振動中心とする単振動だから，

振幅 $A_1 = x_{\max} - x_0$　・・・⑧

よって，負方向には，$x = x_0 - (x_{\max} - x_0) = 2x_0 - x_{\max}$ の位置まで移動する。

次に，$2x_0 - x_{\max} < x_0'$ とすると，

今度は，$x = x_0'$ を振動中心とする単振動になる。

よって，

$$\begin{aligned}\text{振幅}A_2 &= x_0' - (2x_0 - x_{\max}) \\ &= x_0' - 2x_0 + x_{\max} \\ &= -x_0 - 2x_0 + x_{\max} \\ &= x_{\max} - 3x_0 \quad \cdots ⑨\end{aligned}$$

⑧，⑨より，$A_1 > A_2$

こうして，時間 $\dfrac{T}{2}$ ごとに振幅が $2x_0$ ずつ小さくなっていく。

すなわち振動が減衰していく。

やがて，振幅が最大となる位置で質点が静止したときに，

$|F| = \left| -K\left(x_n - \dfrac{f}{K}\right) \right| <$ 最大摩擦力 μmg となれば，単振動運動が終了する。

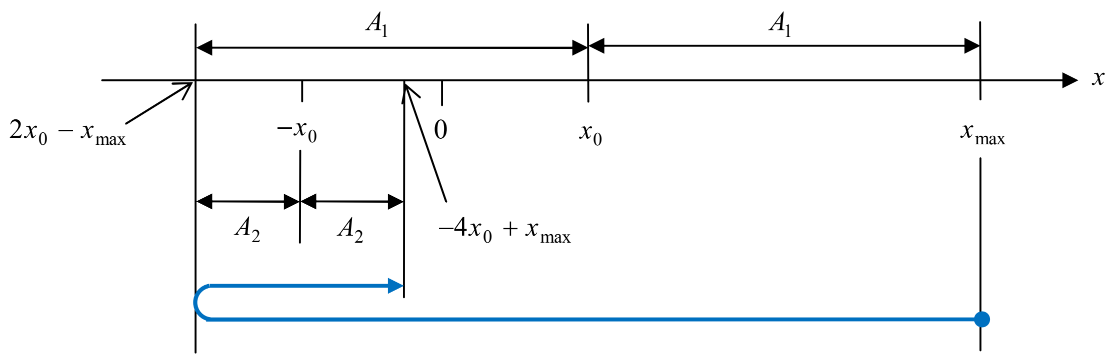
例

質点を下図 $x_{\max}$ で放すと，$x = -4x_0 + x_m$ で質点は静止する。

$|k(-4x_0 + x_{\max})| < kx_0 = |f|$

動摩擦力 f の大きさは最大摩擦力 μmg より小さいから，

質点は $x = -4x_0 + x_m$ で完全に静止する。



2．非保存力が働いている単振動運動の力学的エネルギーも保存される。

単振動の保存力 $F_0 = -Kx$ （x は物体に働く保存力のつり合いの位置からの変位）と一定の非保存力 f を受けている単振動運動においても，

その力学的エネルギーが保存されることを確かめてみよう。

確認

質点の位置が同一直線上を x_1 から x_2 へ変化したときを考える。

力学的エネルギーと非保存力による仕事の関係

「位置 x_1 の力学的エネルギー＋非保存力 f の仕事＝位置 x_1 の力学的エネルギー」

について，

・位置 x_1，x_2 の運動エネルギーを，それぞれ $\frac{1}{2}m{v_1}^2$，$\frac{1}{2}m{v_2}^2$ とする。

・位置 x_1，x_2 の保存力の位置エネルギーは，それぞれ $\frac{1}{2}K{x_1}^2$，$\frac{1}{2}K{x_2}^2$ である。

より，

$$\frac{1}{2}K{x_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_1}^2 + f(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}K{x_2}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

ここで，この単振動の運動方程式 $ma = -K\left(x - \frac{f}{K}\right) = -KX$ より，

$X_1 = x_1 - \frac{f}{K}$，$X_2 = x_2 - \frac{f}{K}$ とおくと，$x_1 = X_1 + \frac{f}{K}$，$x_2 = X_2 + \frac{f}{K}$ だから，

$$\frac{1}{2}K\left(X_1 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}m{v_1}^2 + f\left\{\left(X_2 + \frac{f}{K}\right) - \left(X_1 + \frac{f}{K}\right)\right\} = \frac{1}{2}K\left(X_2 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

$$\frac{1}{2}K{X_1}^2 + X_1 f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}m{v_1}^2 + fX_2 - fX_1 = \frac{1}{2}K{X_2}^2 + X_2 f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

$$\frac{1}{2}K{X_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}K{X_2}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

よって，$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$ 一定

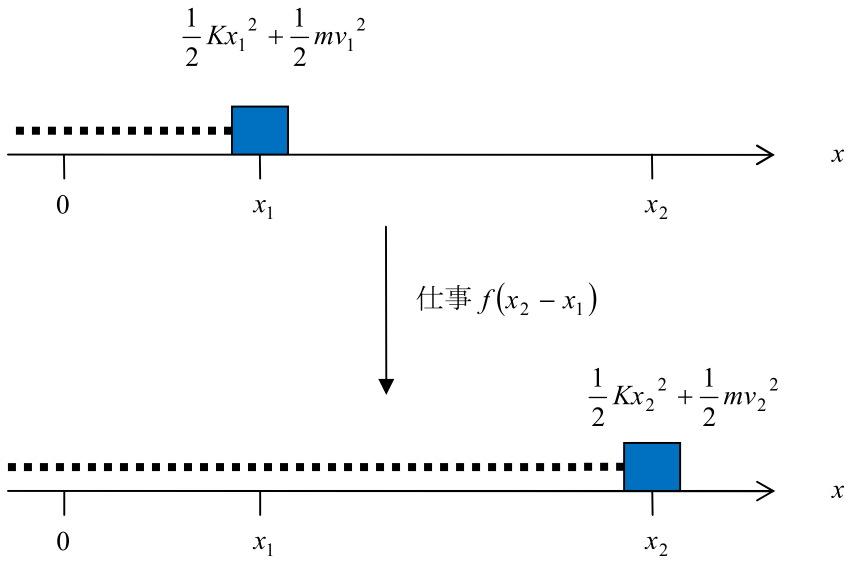
同様に，逆方向の質点の移動についても，$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$ 一定

これは，非保存力が働いている単振動運動であっても，

単振動運動の力学的エネルギー保存の法則

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 一定$$

が成り立つことを示している。



これは，$F=-KX$ は非保存力も含めた弾性体とみなせるからである。

つまり，弾性力の $\frac{1}{2}KX^2$ を弾性力の位置エネルギー（弾性エネルギー）と見なせば，

弾性力の力学的エネルギー保存の法則

$$\frac{1}{2}KX^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{一定}$$

が成り立ち，その中に非保存力も含まれてしまうからである。
単振動をあまり難しく考えず，
「ばね定数はそのままで，自然長の位置が変化しただけのばねにつけられた物体の運動」
と高を括るぐらいがいいでしょう。