

55. 浮力と単振動

(1), (2)

(1)は単振動の振動中心を(2)はその周期を求めさせる問題だから、
単振動の運動方程式を立ててから、それらをまとめて求めることにする。

単振動の運動方程式

液面を基準に鉛直下向きに x 軸をとり、木片 A の質量はとりあえず m とおき、
木片 A の底面の液面下の位置を x 、木片の加速度を a とし、木片の運動方程式を立てると、

$$ma = mg - \rho S g x$$

さらに、この式が単振動運動であることを明確に表すように変形すると、

$$ma = -\rho S g \left(x - \frac{m}{\rho S} \right)$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると、

$$\rho S g = K, \quad X = x - \frac{m}{\rho S}$$

振動中心では、 $X = 0$ より、 $x_0 - \frac{m}{\rho S} = 0$

$$\therefore x_0 = \frac{m}{\rho S} = \frac{\frac{\rho}{4} S l}{\rho S} = \frac{l}{4} \quad \dots \text{(1)の答}$$

$$\text{また、単振動の周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{\rho}{4} S l}{\rho S g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{4g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots \text{(2)の答}$$

補足

単振動の周期 T をきつちりと求めると、
運動方程式 $ma = -KX$ で表される単振動を表す式は、
振幅を A 、角振動数を $\omega (> 0)$ 、初期位相を α とすると、

$$X = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{dX}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X$$

$$\text{一方、} ma = -KX \text{ より、} a = -\frac{K}{m} X$$

$$\text{よって、} -\omega^2 X = -\frac{K}{m} X$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\because \omega > 0)$$

角振動数とは、周期 T を位相 2π と対応させたときの、位相の変化速度のことだから、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho Sg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{4g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots \text{(2)の答}$$

(3)

木片 A の質量はとりあえず m とおく。

$$ma = -\rho Sg \left(x - \frac{m}{\rho S} \right), \quad \frac{m}{\rho S} = \frac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho S} = \frac{l}{4} \text{ より,}$$

$$ma = -\rho Sg \left(x - \frac{l}{4} \right)$$

ここで、 $\rho Sg = K$ 、 $X = x - \frac{l}{4}$ とおくと、 $ma = -KX$

単振動運動の力学的エネルギーは保存されるから、

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

木片 A の上面が水面と同じになるように押し下げたとき

$$x = l \text{ より, } X = l - \frac{l}{4} = \frac{3}{4}l, \quad v = 0$$

木片 A が飛び出す瞬間

$$x = 0 \text{ より, } X = 0 - \frac{l}{4} = -\frac{l}{4}$$

よって、

$$\frac{1}{2}K \left(\frac{3}{4}l \right)^2 = \frac{1}{2}K \left(-\frac{l}{4} \right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}Kl^2 \quad \dots \text{①}$$

木片 A が飛び出してからの力学的エネルギー保存の法則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh \quad \dots \text{②}$$

①, ②より,

$$\frac{1}{4} Kl^2 = mgh$$

$$\therefore h = \frac{Kl^2}{4mg} = \frac{\rho Sgl^2}{4 \cdot \frac{\rho}{4} Slg} = l \quad \dots \text{(答)}$$

あるいは,

非保存力 (浮力) の仕事 = 力学的エネルギー変化

運動エネルギー変化は, はなした瞬間の速度 = 最高点の速度 = 0 より, 0

重力の位置エネルギーの基準を水面にとると, $mgh - mg(-l) = mg(h+l)$

よって, 力学的エネルギー変化 = $mg(h+l)$ $\dots \text{③}$

また, 浮力と変位は同じ向きだから,

$$\text{浮力の仕事} = \left| \int_{-l}^0 dW \right| \cos 0 = \left| \int_{-l}^0 -\rho Sxg dx \right| = \frac{1}{2} \rho Sl^2 g \quad \dots \text{④}$$

③, ④より,

$$mg(h+l) = \frac{1}{2} \rho Sl^2 g$$

$$\frac{\rho}{4} Slg(h+l) = \frac{1}{2} \rho Sl^2 g$$

$$\therefore h = l \quad \dots \text{(答)}$$

(4)

単振動の運動方程式

液面を基準に鉛直下向きに x 軸をとり、木片 A の質量はとりあえず m とおき、
木片 A の底面の液面下の位置を x 、木片の加速度を a とし、木片の運動方程式を立てると、
 $ma = mg - \rho Sgx - k(x - x_0)$

さらに、この式が単振動運動であることを明確に表すように変形すると、

$$ma = -(\rho Sg + k)x + mg + kx_0 = -(\rho Sg + k)\left(x - \frac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}\right)$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると、

$$\rho Sg + k = K, \quad X = x - \frac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}$$

よって、

$$\text{周期 } T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho Sg + k}} = \pi\sqrt{\frac{\rho Sl}{\rho Sg + k}} \quad \dots \text{(答)}$$

補足

振動中心の $X = 0$ より、このときの木片 A の底面の液面下の位置 $x_0' = \frac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}$