56. 惑星のトンネル

(4)

$-R \le x \le R$ において，物体 A に働く外力 $f = -\frac{4}{3}\pi\rho G m x$ だから，

$x<0$ のとき $f>0$，つまり物体 A に働く外力は $x=0$ の向き，$x=0$ のとき $f=0$，
$x>0$ のとき $f<0$，つまり物体 A に働く外力は $x=0$ の向きとなり，
物体 A は常に $x=0$ の向きに，x の大きさに比例した大きさの外力を受けるため，
単振動運動をする。

(5)

物体 A の加速度を a とすると，その運動方程式は，

$$ma = -\frac{4}{3}\pi\rho G m x$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると，

$K = \frac{4}{3}\pi\rho G m$，$X = x$ だから，

物体 A は $x=0$ を振動中心とする周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\rho G m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ の単振動運動を行う。

よって，$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$

また，単振動運動の力学的エネルギーは保存されるから，

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

よって，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho G m \cdot R^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

$$\therefore v_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}} \quad \text{・・・(答)}$$

または，

振動中心の速さ $v_1 = R\omega = R\cdot\frac{2\pi}{T} = 2\pi R\sqrt{\frac{\rho G}{3\pi}} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ ・・・(答)

(6)

$-R \leq x \leq R$ では，単振動運動の力学的エネルギーが保存されるから，

物体が惑星 Q の表面に達したときの速さを v_3 とすると，

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{1}{2}mv_3{}^2 \quad \left(K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm\right) \quad \cdots ①$$

$R \leq x$ では，万有引力の力学的エネルギーが保存されるから，

$$\frac{1}{2}mv_3{}^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 + \left(-\frac{GMm}{3R}\right) \quad \left(M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_3{}^2 = \frac{2GMm}{3R} \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{2GMm}{3R}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{KR^2}{m} + \frac{4GM}{3R}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi\rho Gm \cdot R^2}{m} + \frac{4G \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3}{3R}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi\rho GR^2}{3} + \frac{16\pi\rho GR^2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{28\pi\rho GR^2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{4R^2}{9} \cdot 7\pi\rho G}$$

よって，$v_2 = \frac{2R}{3}\sqrt{7\pi\rho G}$　・・・(答)