58. ベルトコンベア上の物体の単振動

[A]

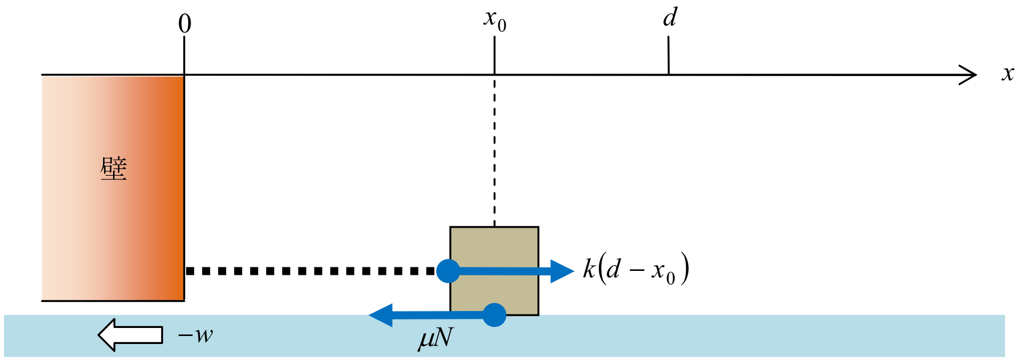
(1)

物体がベルトから最大摩擦力を受けた瞬間，物体はベルトに対し右向きにすべりだす。
この瞬間において，物体がベルトから受ける最大摩擦力とばねから受ける弾性力がつり合う。
よって，垂直抗力の大きさを N とすると，

$k(d-x_0)=\mu N$

$N=mg$ より，$k(d-x_0)=\mu mg$

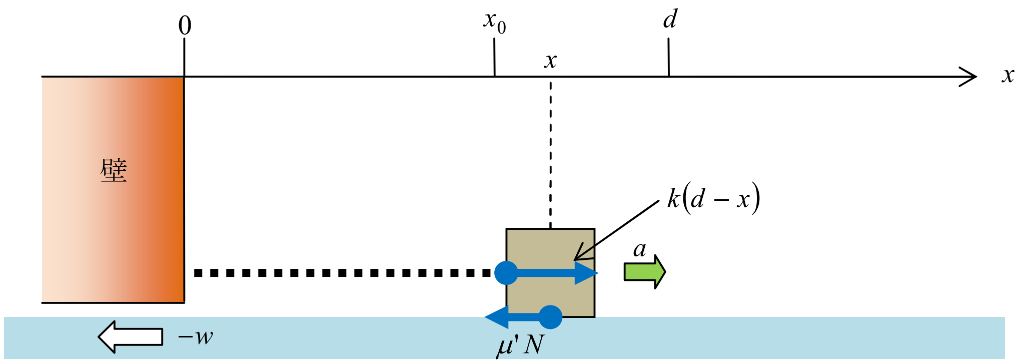
$\therefore x_0=d-\dfrac{\mu mg}{k}$ ・・・(答)



[B]

(2)

$ma=k(d-x)-\mu' mg$ ・・・(答)



(3)

壁にばねをつなぐわけだから，$x = L$ の位置がそのばねの自然長の位置である。

自然長のばねの弾性力は 0 だから，

$$k(d - L) - \mu' mg = 0$$

$$\therefore L = d - \frac{\mu' mg}{k} \quad \cdots (答)$$

(4)

(2)，(3)より，

$$\begin{aligned} ma &= k(d - x) - \mu' mg \\ &= -kx + kd - \mu' mg \\ &= -k\left\{x - \left(d - \frac{\mu' mg}{k}\right)\right\} \\ &= -k(x - L) \end{aligned}$$

（$-k$ で括ったのは，右辺が復元力であることを明確にするためである）

$ma = -kX$ とすると表される運動方程式は，

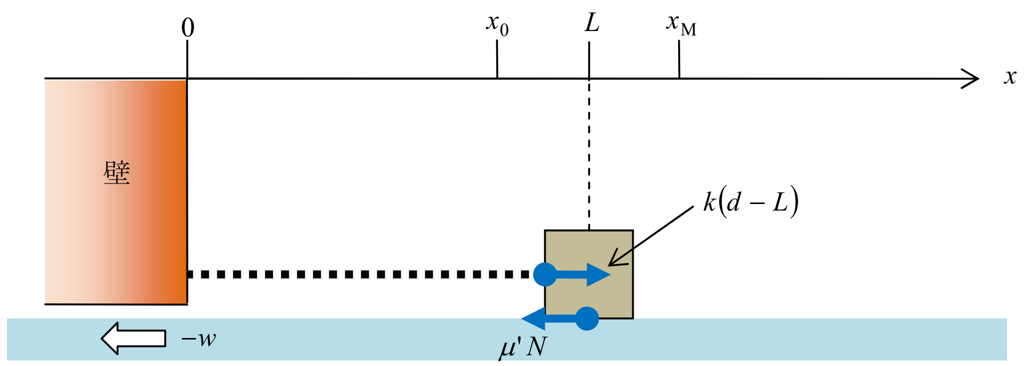
$X = 0$ を振動中心とする単振動の運動方程式だから，

$ma = -k(x - L)$ は $x = L$ を振動中心とする単振動運動を表す。

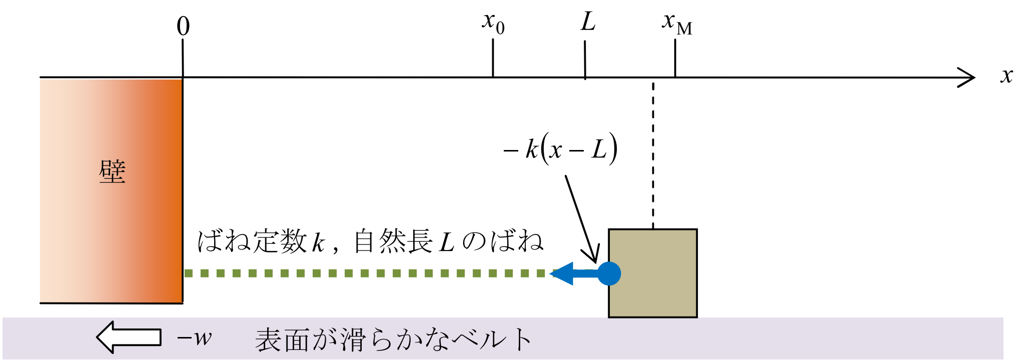
よって，$x = L$ は振動端点の中点，すなわち x_0 と x_M の中点である。

よって，$L = \dfrac{x_0 + x_M}{2}$ より，

$$x_M = 2L - x_0$$



運動方程式を $ma=-k(x-L)$ とすることにより，
動摩擦力も組み込まれた自然長 L のばねの単振動運動の運動方程式となる。
つまり，物体は摩擦のないベルト上で水平方向に単振動運動をすることになる。
よって，物体の運動はベルトの回転とは無関係になってしまう。



(5)
ベルトの速度は $-w$ だから，物体の速度が $-w$ になったとき，物体はベルトに対し静止する。
つり合いの位置からの変位 X で表した単振動運動方程式 $ma=-kX$ では，

$\frac{1}{2}kX^2+\frac{1}{2}mv^2=$一定　が成り立つ。

問題の場合，$X=x-L$ だから，

$\frac{1}{2}k(x-L)^2+\frac{1}{2}mv^2=$一定　が成り立つ。

そこで，$v=-w$ となる位置を x_{-w} とすると，
$v=0$ となる振動端点 $x=x_0$ との間に，

$\frac{1}{2}k(x_{-w}-L)^2+\frac{1}{2}m(-w)^2=\frac{1}{2}k(x_0-L)^2+0$　が成り立つ。

$$\therefore (x_{-w}-L)^2=(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}$$

$$\therefore x_{-w}-L=\pm\sqrt{(x_0-L)-\frac{mw^2}{k}}$$

ここで，

$x_{-w}-L=\sqrt{(x_0-L)-\frac{mw^2}{k}}$ なのか $x_{-w}-L=-\sqrt{(x_0-L)-\frac{mw^2}{k}}$ なのかが問題になるが，
物体は壁に向かって加速され，$x=L$ で最も速くなる。
したがって，ベルトの動く速さが物体の振動中心における速さより速くなってしまうと

物体がベルトに対して静止できなくなる。
よって，ベルトの動く速さは振動中心における物体の速さ以下であり，
物体は振動中心に達したときか，あるいは，それまでにベルトに対し静止することになる。
つまり，静止位置はLより右ということ，すなわち$x_{-w}-L\geq 0$ということになる。
ゆえに，

$$x_{-w}-L=\sqrt{(x_0-L)-\frac{mw^2}{k}}$$

$$\therefore x_{-w}=L+\sqrt{(x_0-L)-\frac{mw^2}{k}} \quad \cdots (答)$$

である。

[C]

(6)

(5)の解説より，ベルトの動く速さが物体の振動中心での速さより速くなると，
物体はベルトに対し静止することなく単振動運動をすることになる。
よって，求めるベルトの速さw_Cは，物体の振動中心での速さと等しい。
そこで，
$v=0$となる振動端点$x=x_0$と$x=L$である振動中心について，

$\frac{1}{2}k(x-L)^2+\frac{1}{2}mv^2=$一定 を使うと，

$$0+\frac{1}{2}mw_C{}^2=\frac{1}{2}k(x_0-L)^2+0$$

$$\therefore mw_C{}^2=k(x_0-L)^2$$

ここで，(1)，(3)より，

$x_0=d-\frac{\mu mg}{k}$， $L=d-\frac{\mu' mg}{k}$ だから，

$$x_0-L=-\frac{\mu mg}{k}+\frac{\mu' mg}{k}=-(\mu-\mu')\cdot\frac{mg}{k}$$

よって， $mw_C{}^2=k(\mu-\mu')^2\cdot\frac{m^2g^2}{k^2}$

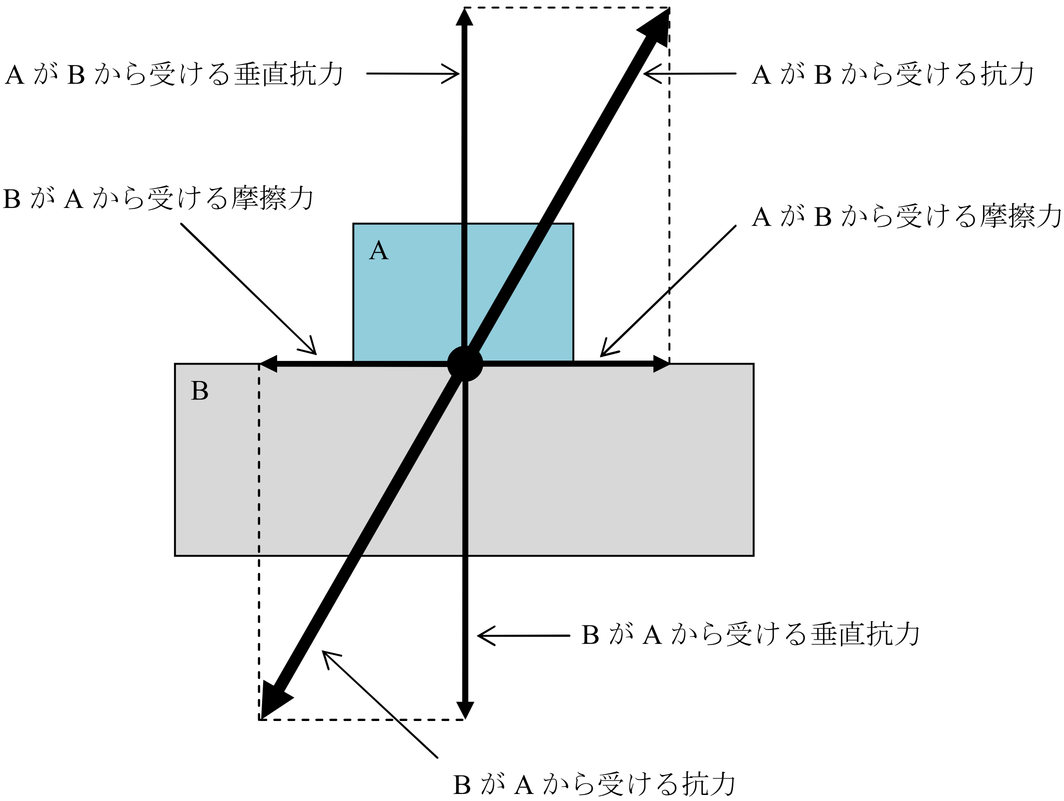
w_Cは速さだから$w_C\geq 0$
また，条件より$\mu>\mu'$

$$\therefore w_C=(\mu-\mu')g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots (答)$$

摩擦力

抗力と摩擦力

2 物体間の接触面に働く抗力の面に平行な分力を摩擦力，垂直な分力を垂直抗力という。
抗力は作用反作用の力なので，その分力の摩擦力と垂直抗力も作用反作用の力である。



静止している物体が接触面に対して平行方向に動きだそうとするのを妨げる摩擦力を
静止摩擦力といい，その大きさが最大のものをとくに最大摩擦力という。
接触面に対し平行方向に運動している物体の運動を妨げる摩擦力を動摩擦力という。
動摩擦力は運動摩擦力ともいう。

静止摩擦力と最大摩擦力

接触面に対し静止している物体を動かそうと接触面に平行な外力を加えても物体が静止し続けるとき，その物体は外力と大きさが同じで向きが真逆の力（静止摩擦力）を接触している物体から受けている。外力を大きくしていくと，小さいときは余裕で静止しているが，やがて耐えきれなくなって物体が動き出す。つまり，外力の大きさが静止摩擦力の大きさの最大値（最大摩擦力）より大きくなり物体が動き出す。

余裕で静止しているとき　：外力の大きさ F ＝静止摩擦力 f

ぎりぎり静止しているとき：外力の大きさ F_0 ＝最大摩擦力 f_{max}

垂直抗力 N と最大摩擦力 f_{max} の関係

最大摩擦力 f_{max} は物体の接触物体に対する垂直抗力の大きさに比例する。

垂直抗力は作用反作用の力だから，接触する 2 物体が受ける垂直抗力の大きさは等しい。

摩擦係数

2 物体の接触面の性質と状態で決まる定数で，たとえば，面を磨いたりロウを塗ったりするなどして面を滑らかにすると小さくなる。

摩擦係数には，静止摩擦係数，動摩擦係数，ころがり摩擦係数があり，

それぞれ最大摩擦力，動摩擦力，ころがり摩擦力の比例定数でもある。

静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ'，ころがり摩擦係数を μ'' とすると，

一般に，$\mu > \mu' > \mu''$ が成り立つ。

　ころがり摩擦力：球や円柱がころがるとき受ける摩擦力

最大摩擦力と動摩擦力の式

垂直抗力を N，静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とすると，

最大摩擦力 $f_{max} = \mu N$

動摩擦力 $f' = \mu' N$