68. シリンダー内に閉じ込められた気体の状態変化

(1)

状態 B における気体の圧力を p_{B} とすると，

ピストンにはたらく力のつり合いより， $p_{\mathrm{B}}S = pS$

$\therefore p_{\mathrm{B}} = p$　・・・(答)

状態 A $(n, p, 3Sh, T)$，状態 B $(n, p, Sh, T_{\mathrm{B}})$ とすると，

理想気体の状態方程式より， $\dfrac{nT}{PV} = \dfrac{1}{R} =$ 一定

よって，

$$\frac{nT}{p \cdot 3Sh} = \frac{nT_{\mathrm{B}}}{p \cdot Sh}$$

$\therefore T_{\mathrm{B}} = \dfrac{T}{3}$　・・・(答)

(2)

過程 A→B は等圧変化である。

内部エネルギーの変化

単原子分子の理想気体の $C_v = \dfrac{3}{2}R$ より，

$$\Delta U_{\mathrm{AB}} = nC_v(T_{\mathrm{B}} - T) = n \cdot \frac{3}{2}R\left(\frac{T}{3} - T\right) = -nRT$$

ここで，状態 A の状態方程式 $p \cdot 3Sh = nRT$

よって，

$\Delta U_{\mathrm{AB}} = -3pSh$　・・・(答)

気体が外部にした仕事

求める仕事を W_{AB} とすると，

W_{AB} は，気体の力ベクトルとピストンの移動ベクトルの内積だから，

$W_{\mathrm{AB}} = \vec{p}S \cdot 2\vec{h} = 2S|\vec{p}||\vec{h}|\cos 180° = -2pSh$　・・・(答)

気体に加えられた熱量

$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{AB}} = -3pSh + (-2pSh) = -5pSh$　・・・(答)

(3)

状態 C の圧力を p_C とすると，状態 B$\left(n, p, Sh, \dfrac{T}{3}\right)$，状態 C$\left(n, p_C, Sh, T\right)$

理想気体の状態方程式より，$\dfrac{PV}{nT} = R =$ 一定

よって，$\dfrac{p \cdot Sh}{n \cdot \dfrac{T}{3}} = \dfrac{p_C \cdot Sh}{nT}$

$\therefore p_C = 3p$　・・・(答)

補足

状態 A$\left(n, p, 3Sh, T\right)$ と状態 C$\left(n, p_C, Sh, T\right)$ を使って，

$\dfrac{p \cdot 3Sh}{n \cdot T} = \dfrac{p_C Sh}{nT}$ から，$p_C = 3p$ を求めてもよい。

(4)

過程 B→C は等積変化である。

内部エネルギーの変化

単原子分子の理想気体の $C_v = \dfrac{3}{2}R$ より，

$\Delta U_{BC} = nC_v\left(T - \dfrac{T}{3}\right) = n \cdot \dfrac{3}{2}R \cdot \dfrac{2T}{3} = nRT$

ここで，状態 A の状態方程式 $p \cdot 3Sh = nRT$

よって，

$\Delta U_{BC} = 3pSh$　・・・(答)

気体が外部にした仕事

求める仕事を W_{BC} とすると，ピストンが静止したままだから，

$W_{BC} = 0$　・・・(答)

気体に加えられた熱量

$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = 3pSh + 0 = 3pSh$　・・・(答)

(5)

液体の密度を ρ とすると，ピストンにはたらく力のつり合いより，

$(3h - h)S\rho g + pS = p_C S$

ここで、$p_C = 3p$ より，$2Sh\rho g + pS = 3pS$

$\therefore \rho = \dfrac{p}{gh}$　・・・(答)

(6)

ピストンの位置が x のときの気体の圧力を $p(x)$ とすると，

ピストンにはたらく力のつり合いより，

$p(x)\cdot S=(3h-x)S\rho g+pS$

$\rho=\dfrac{p}{gh}$ より，

$$p(x)S=(3h-x)S\frac{p}{gh}g+pS$$

よって，

$$p(x)=(3h-x)\frac{p}{h}+p$$

$$p(x)=4p-\frac{p}{h}x \quad ・・・（答）$$

(7)

状態 C$(n,3p,Sh,T)$，状態 A$(n,p,3Sh,T)$ より，

内部エネルギーの変化

$\Delta U_{\mathrm{CA}}=nC_v(T-T)=0$ ・・・（答）

気体が外部にした仕事

微小変化の仕事を dW とすると， $dW=p(x)Sdx$

気体の圧力と変位の向きは同じだから，仕事は正である。

よって，

$$W_{\mathrm{CA}}=\int_h^{3h}dW=\int_h^{3h}p(x)Sdx=\int_h^{3h}\left(4p-\frac{p}{h}x\right)pSdx=pS\left[4x-\frac{x^2}{2h}\right]_h^{3h}=4pSh \quad ・・・（答）$$

別解：***P-V*** グラフの面積から仕事を求める。

というか，こっちのほうが受験生用の解き方でしょう。

P-V グラフにするには，

まず $p(x)=4p-\dfrac{p}{h}x$ を気体の体積の関数に変えなければならない。

気体の体積を V とすると，$V=Sx$ より，$x=\dfrac{V}{S}$

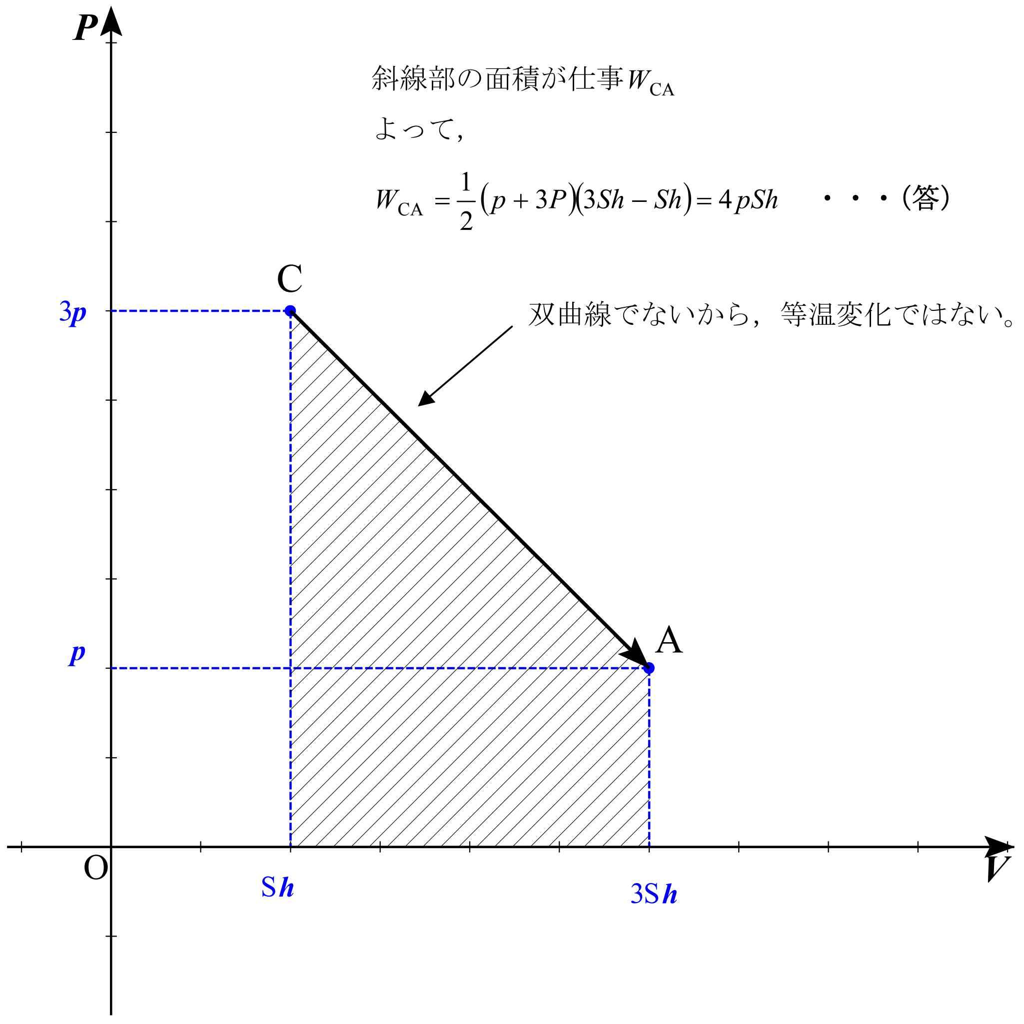
これを $p(x)=4p-\dfrac{p}{h}x$ に代入すると，

$p(x)$ は体積 V の関数 $p(V)=4p-\dfrac{p}{Sh}V \quad (Sh\le V\le 3Sh)$ になる。

斜線部の面積が仕事 W_{CA}

よって，

$$W_{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}(p+3P)(3Sh-Sh)=4pSh \quad ・・・（答）$$



気体に加えられた熱量

$$Q_{\mathrm{CA}}=\Delta U_{\mathrm{CA}}+W_{\mathrm{CA}}=0+4pSh=4pSh \quad ・・・（答）$$

補足

状態Cから状態Aの変化が等温変化なら，双曲線（赤色）を描く。

$T=\dfrac{PV}{nR}$ より，PV 値が大きいほうが高温だから，

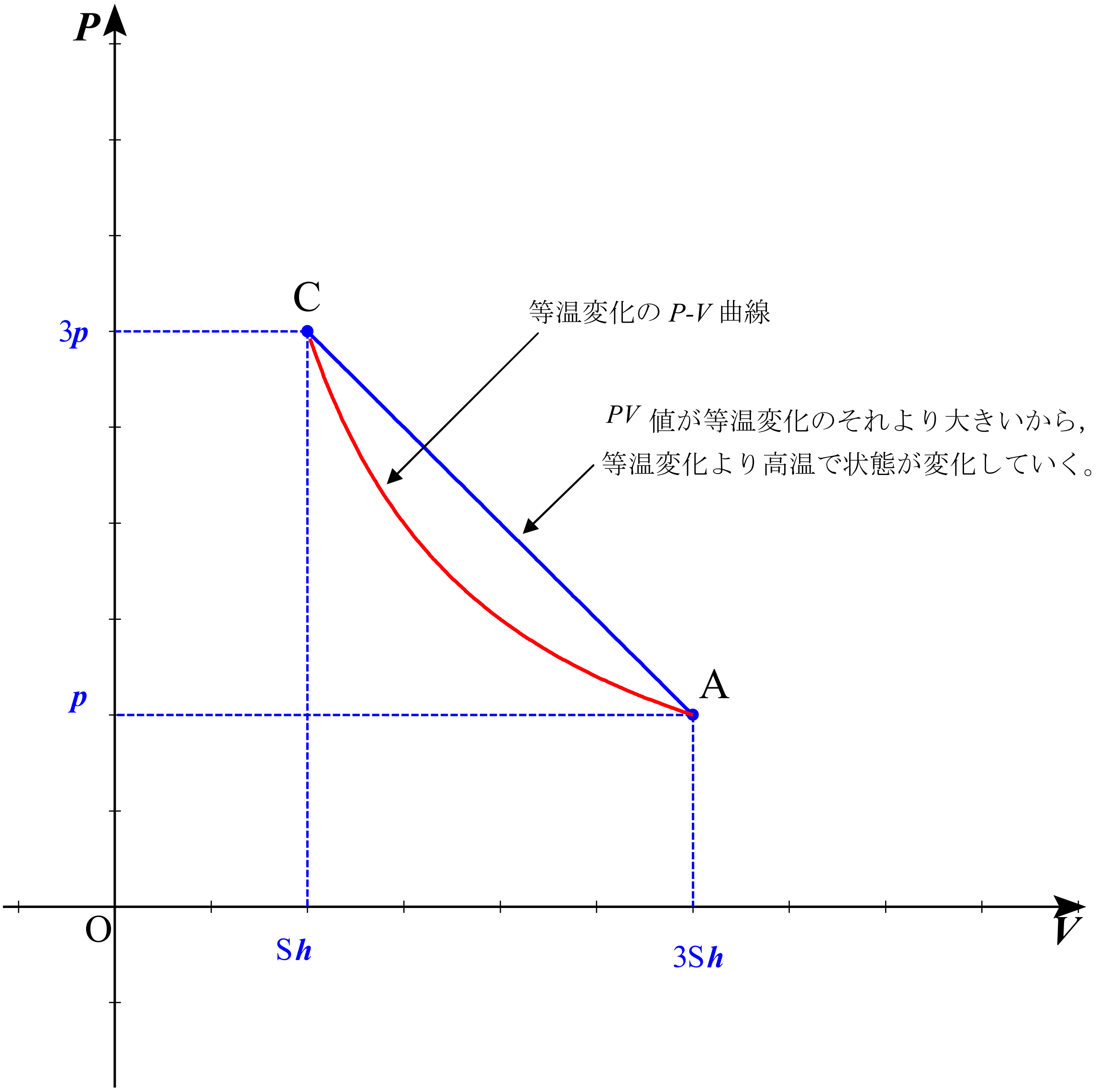
等温変化より高温で状態が変化することがわかる。

補足

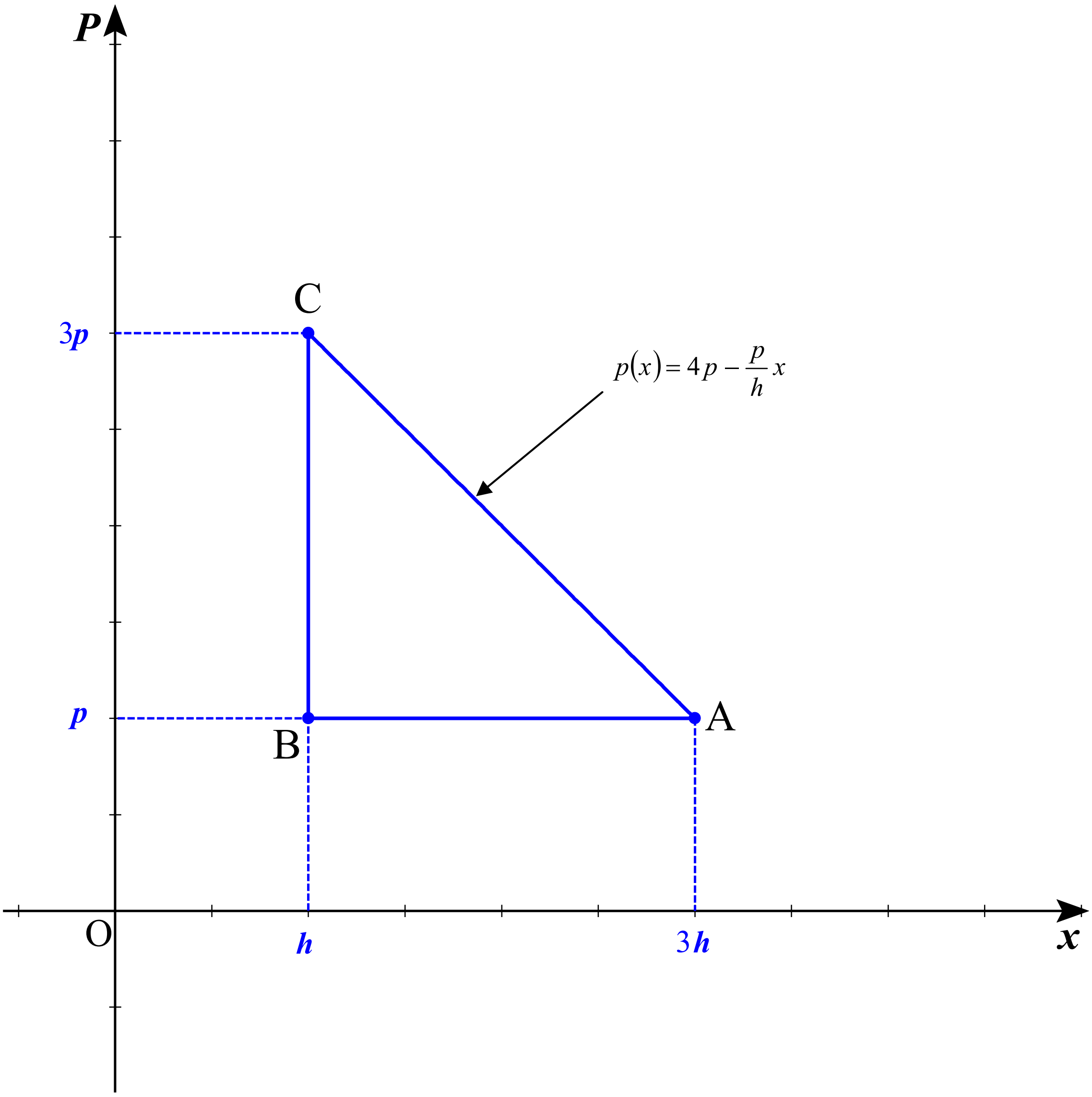
状態Cから状態Aの変化が等温変化なら，双曲線（赤色）を描く。

$T=\dfrac{PV}{nR}$ より，PV 値が大きいほうが高温だから，

等温変化より高温で状態が変化することがわかる。



(8)



(9)

A→B：等圧変化

状態 A$(n, p, 3Sh, T)$から状態 B$\left(n, p, Sh, \dfrac{T}{3}\right)$への途中過程の状態を$(n, p, Sx, T(x))$とすると，

理想気体の状態方程式より，$\dfrac{PV}{nT} = R =$ 一定 だから，

状態 A と途中過程の状態との間に，$\dfrac{p \cdot 3Sh}{nT} = \dfrac{p \cdot Sx}{nT(x)}$ $(h \leq x \leq 3h)$の関係が成り立つ。

よって，

$T(x) = \dfrac{T}{3h}x \quad (h \leq x \leq 3h)$ ・・・①

B→C：等積変化

状態 B$\left(n, p, Sh, \dfrac{T}{3}\right)$から状態 C$(n, 3p, Sh, T)$への変化は，

等積変化だから，$x = h$ ・・・②

C→A

状態 C$(n, 3p, Sh, T)$から状態 A$(n, p, 3Sh, T)$への途中過程の状態を$(n, p(x), Sx, T(x))$とすると，

理想気体の状態方程式より，$\dfrac{PV}{nT} = R =$ 一定 だから，

状態 A と途中過程の状態との間に，

$\dfrac{p \cdot 3Sh}{nT} = \dfrac{p(x) \cdot Sx}{nT(x)}$ $(h \leq x \leq 3h)$の関係が成り立つ。

$T(x) = \dfrac{T}{3ph}xp(x)$

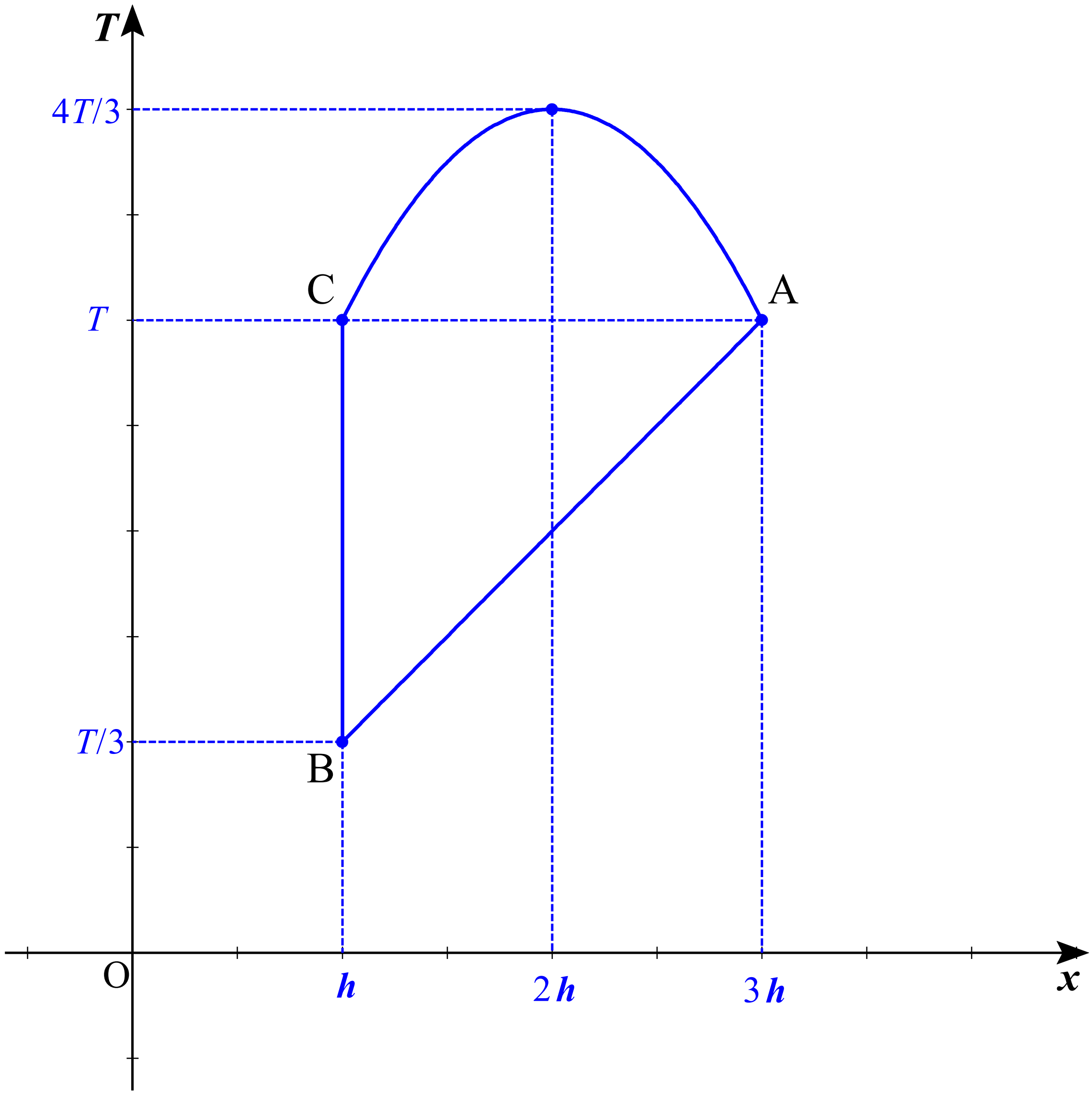
(4)より，$p(x) = 4p - \dfrac{p}{h}x$ だから，

$$T(x) = \frac{T}{3ph}x\left(4p - \frac{p}{h}x\right) = -\frac{T}{3h^2}x^2 + \frac{4T}{3h}x = -\frac{T}{3h^2}\left(x^2 - 4hx\right) = -\frac{T}{3h^2}(x - 2h)^2 + \frac{4}{3}T$$

よって，

$T(x) = -\dfrac{T}{3h^2}(x - 2h)^2 + \dfrac{4}{3}T \quad (h \leq x \leq 3h)$ ・・・③

①，②，③より，



補足

状態 C から状態 A の変化が等温変化の場合