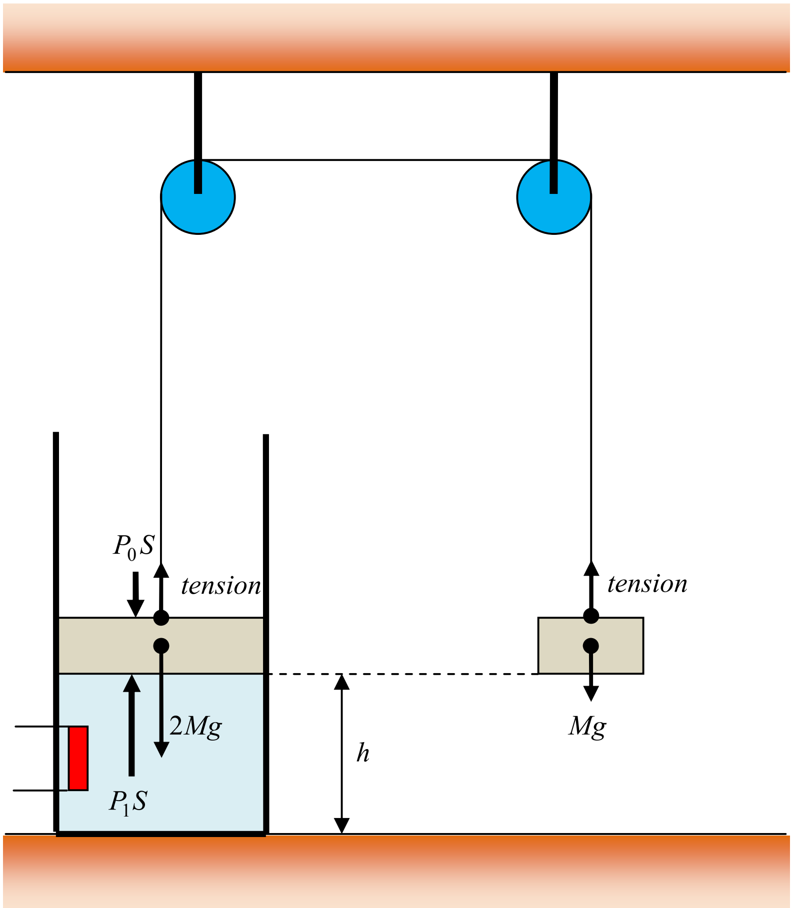
69. シリンダー内の気体がする仕事

(1)



シリンダー内の気体の圧力

質量Mのおもりに働く力のつり合いより，

$tension = Mg$ ・・・①

シリンダー内の気体の圧力をP_1とすると，ピストンに働く力のつり合いより，

$P_1S + tension = P_0S + 2Mg$ ・・・②

①，②より，$P_1 = P_0 + \dfrac{Mg}{S}$ ・・・$\boxed{ア}$

シリンダー内の絶対温度

理想気体の状態方程式より，$P_1Sh = 1 \times RT_1$

これと$P_1 = P_0 + \dfrac{Mg}{S}$より，

$T_1 = \dfrac{(P_0S + Mg)h}{R}$ ・・・$\boxed{イ}$

(2)

シリンダー内の気体の絶対温度

求める温度 T_2 とすると，状態 (P_1, Sh, T_1) から状態 $\left(P_1, \frac{3}{2}Sh, T_2\right)$ への等圧変化である。

1mol の理想気体の状態方程式 $PV = RT$ を変形し，$\frac{T}{PV} = \frac{1}{R} =$ 一定 を使うと，

$$\frac{T_2}{P_1 \cdot \frac{3}{2}Sh} = \frac{T_1}{P_1 Sh} \qquad \therefore T_2 = \frac{3}{2}T_1$$

これと $T_1 = \frac{(P_0 S + Mg)h}{R}$ より，

$$T_2 = \frac{3(P_0 S + Mg)h}{2R} \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{ウ}$$

シリンダー内の気体が外部にした仕事

求める仕事を W_2 とすると，$W_2 = \vec{P}_1 S \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{h} - \vec{h}\right) = \frac{1}{2}S\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{h}\right|\cos 0° = \frac{1}{2}P_1 Sh$

これと $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$ より，

$$W_2 = \frac{1}{2}(P_0 S + Mg)h \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{エ}$$

内部エネルギーの増加

内部エネルギーの増加を ΔU_2 とすると，

$$\Delta U_2 = 1 \times C_v \Delta T = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R\left(\frac{3}{2}T_1 - T_1\right) = \frac{3}{4}RT_1$$

これと $T_1 = \frac{(P_0 S + Mg)h}{R}$ より，

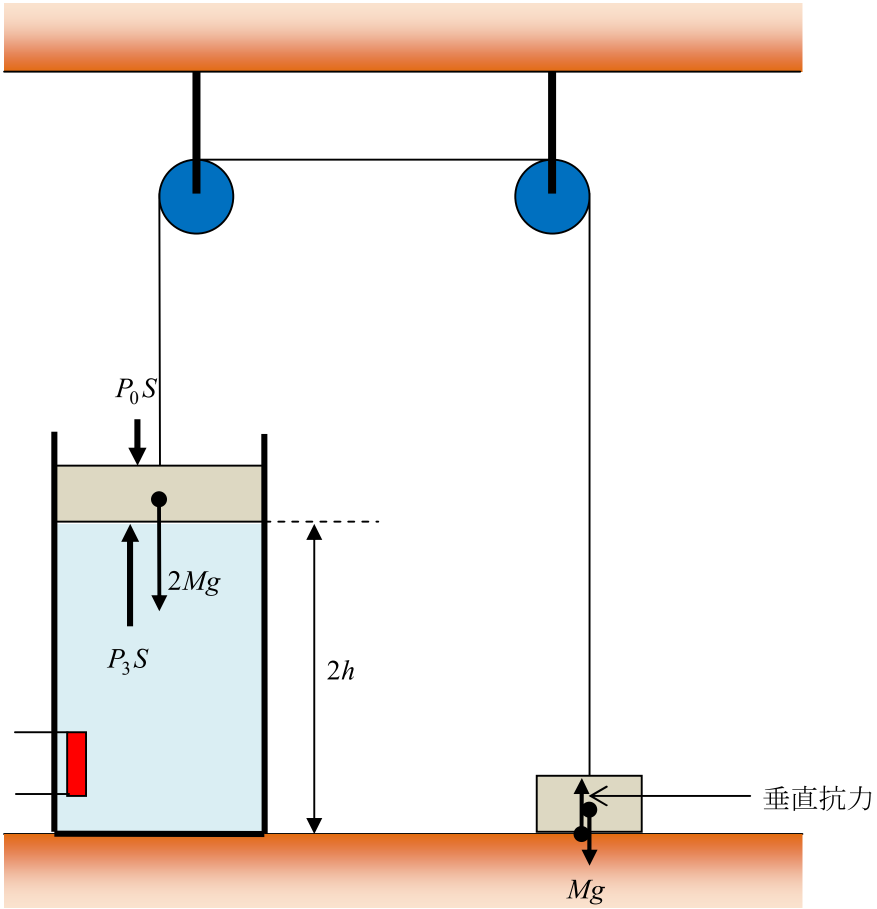
$$\Delta U_2 = \frac{3}{4}(P_0 S + Mg)h \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{オ}$$

受け取った熱量

受け取った熱量を Q_2 とすると，熱力学第 1 法則より，

$$Q_2 = \Delta U_2 + W_2 = \frac{3}{4}(P_0 S + Mg)h + \frac{1}{2}(P_0 S + Mg)h = \frac{5}{4}(P_0 S + Mg)h \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{カ}$$

(3)



シリンダー内の気体の圧力

質量 M のおもりに働く重力と垂直抗力がつり合い，張力が 0 になる。

よって，ピストンに働く力のつり合いは，

$P_3S = P_0S + 2Mg$

$\therefore P_3 = P_0 + \dfrac{2Mg}{S}$ ・・・ $\boxed{キ}$

シリンダー内の絶対温度

質量 M のおもりが h 下降し，接地した瞬間に糸はゆるみはじめる。

このとき，ピストンは h 上昇するから，気体の体積は $2Sh$ になる。

したがって，状態方程式は，$P_3 \cdot 2Sh = 1 \times RT_3$

これと $P_3 = P_0 + \dfrac{2Mg}{S}$ より，

$$T_3 = \frac{2(P_0S + 2Mg)h}{R} \quad \cdots \boxed{ク}$$

シリンダー内の気体が外部にした仕事

圧力 P_3 の等圧変化の仕事だから，解き方は$\boxed{エ}$と同じ。

求める仕事を W_3 とすると，

$$W_3 = P_3 S\left(2h - \frac{3}{2}h\right) = \frac{1}{2}P_3 Sh$$

これと $P_3 = P_0 + \dfrac{2Mg}{S}$ より，

$$W_3 = \frac{1}{2}(P_0 S + Mg)h \quad ・・・\boxed{ケ}$$

受け取った熱量

内部エネルギー変化を ΔU_3 とすると，

$$\begin{aligned}\Delta U_3 &= 1\times C_v \Delta T\\ &= \frac{3}{2}R(T_3 - T_2)\\ &= \frac{3}{2}R\left\{\frac{2(P_0 S + 2Mg)h}{R} - \frac{3(P_0 S + Mg)h}{2R}\right\}\\ &= \frac{3}{4}(P_0 S + 5Mg)h\end{aligned}$$

受け取った熱量を Q_3 とすると，熱力学第 1 法則より，

$$Q_3 = \Delta U_3 + W_3 = \frac{3}{4}(P_0 S + 5Mg)h + \frac{1}{2}(P_0 S + Mg)h = \frac{1}{4}(5P_0 S + 17Mg)h \quad ・・・\boxed{コ}$$

ちょっと気の抜ける問題でしたね。