70.シリンダー内の気体の状態変化

(1)

(a)

断熱変化である。

$pV^{\frac{5}{3}}=$一定 と $p=\dfrac{RT}{V}$ より，$RTV^{\frac{2}{3}}=$一定

よって，$TV^{\frac{2}{3}}=$一定

体積と温度については，(V_0,T_0)から(aV_0,bT_0)に変化するから，

$$T_0V_0^{\frac{2}{3}}=bT_0(aV_0)^{\frac{2}{3}}$$

$$1=ba^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore a=b^{-\frac{3}{2}}$$　・・・(答)

(b)

気体がピストンにした仕事は$-W$だから，

断熱変化の熱力学第 1 法則の式は，$0=\Delta U+(-W)$

$$\therefore W=\Delta U=C_v\Delta T=\frac{3}{2}R(bT_0-T_0)=\frac{3}{2}(b-1)RT_0=\frac{3}{2}(b-1)p_0V_0$$　・・・(答)

(2)

(c)

等積変化である。

熱量が保存されるから，

物体の熱量変化＋シリンダー内の気体の熱量変化＝0

シリンダー内の気体の変化は等積変化だから，

シリンダー内の気体の熱量変化＝内部エネルギー変化

よって，

物体の熱量変化と内部エネルギー変化の和は 0 である。

物体の熱量変化＝$xR(cT_0-T_0)$，内部エネルギー変化＝$\Delta U=C_v\Delta T=\dfrac{3}{2}R(cT_0-bT_0)$より，

$$xR(cT_0-T_0)+\frac{3}{2}R(cT_0-bT_0)=0$$

$$\therefore c=\frac{2x+3b}{2x+3c}$$　・・・(答)

別解

まわりくどい解法であるが，

系は断熱圧縮を受けているから，物体の温度 T_0 より高温である。

よって，この等積変化で系は物体に熱を放出し，物体はその熱をもらうことになる。

系は放出した熱量だけその内部エネルギーが減少するから，

系が放出した熱量＝内部エネルギーの減少量＝$|\Delta U| = |C_v \Delta T| = \frac{3}{2}R|cT_0 - bT_0|$

系の温度は低下するから， $cT_0 < bT_0$

よって，系が放出した熱量＝$\frac{3}{2}R(bT_0 - cT_0)$

これと，物体の熱量の増加量＝$xR(cT_0 - T_0)$

より，

$$\frac{3}{2}R(bT_0 - cT_0) = xR(cT_0 - T_0)$$

$$\therefore c = \frac{2x+3b}{2x+3c}$$　・・・(答)

(d)

等圧変化である。

熱量が保存されるから，

物体の熱量変化＋シリンダー内の気体の熱量変化＝0

シリンダー内の気体の変化は等圧変化だから，

変化後の温度をT'，圧力をpとすると，

状態(p, aV_0, bT_0)から状態(p, eV_0, T')への状態変化より，

$$\frac{bT_0}{paV_0} = \frac{T'}{peV_0}$$

$$\therefore T' = \frac{be}{a}T_0$$

変化後の物体の温度もT'だから，

物体の熱量変化＝$xR\Delta T = xR\left(\frac{be}{a}T_0 - T_0\right)$　・・・①

シリンダー内の気体の熱量変化＝$\Delta U + p\Delta V = \frac{3}{2}R\Delta T + R\Delta T = \frac{5}{2}R\Delta T = \frac{5}{2}R\left(\frac{be}{a}T_0 - bT_0\right)$

・・・②

①，②より，

$$xR\left(\frac{be}{a}T_0 - T_0\right) + \frac{5}{2}R\left(\frac{be}{a}T_0 - bT_0\right) = 0$$

$$\therefore 2x(be - a) + 5(be - ab) = 0$$

$$\therefore be(2x + 5) = a(2x + 5b)$$

$$\therefore e = \frac{a}{b}\cdot\frac{2x + 5b}{2x + 5}$$

ここで，$a = b^{-\frac{3}{2}}$より，$e = b^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{2x + 5b}{2x + 5}$

$$\therefore e = \frac{2x + 5b}{b^{\frac{5}{2}}(2x + 5)}$$　・・・(答)

補足 1

$\frac{5}{2}R$は，単原子分子の理想気体の定圧モル比熱C_pである。

等圧変化の場合，系が吸収した熱をQ，系の気体の物質量をnとすると，

$$Q = \Delta U + W = nC_p\Delta T$$

が成り立つ。

補足 2

系は断熱圧縮を受けているから，物体の温度T_0より高温である。

よって，系は物体に熱を与えながら収縮する。

すなわち$e<1$であることは明らかであるが，

$e=b^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{2x+5b}{2x+5}$ をbの関数と見なし，$e<1$であることを示してみると，

$$\begin{aligned}e'&=-\frac{5}{2}b^{-\frac{7}{2}}\cdot\frac{2x+5b}{2x+5}+b^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{5}{2x+5}\\&=-\frac{5}{2(2x+5)}\left(2xb^{-\frac{7}{2}}+5b^{-\frac{5}{2}}-2b^{-\frac{5}{2}}\right)\\&=-\frac{5}{2(2x+5)}\left(2xb^{-\frac{7}{2}}+3b^{-\frac{5}{2}}\right)<0\end{aligned}$$

より，eは単調減少関数である。

また，

$b=1$のとき，$e=1$

断熱圧縮により，温度がT_0からbT_0になったから，$bT_0>T_0$より，$b>1$

よって，$e<1$

(3)

(e)

等積変化である。

気体はシリンダーに閉じ込められているから，

(a)の状態変化前の状態(p_0,V_0,T_0)と(e)の状態変化後の状態(fp_0,eV_0,T_0)との間に，

$\frac{PV}{T}=$一定 の関係が成り立つ。

よって，

$$\frac{fp_0\cdot eV_0}{T_0}=\frac{p_0\cdot V_0}{T_0}$$

$\therefore ef=1$

$\therefore f=\frac{1}{e}=\frac{b^{\frac{5}{2}}(2x+5)}{2x+5b}$ ・・・(答)