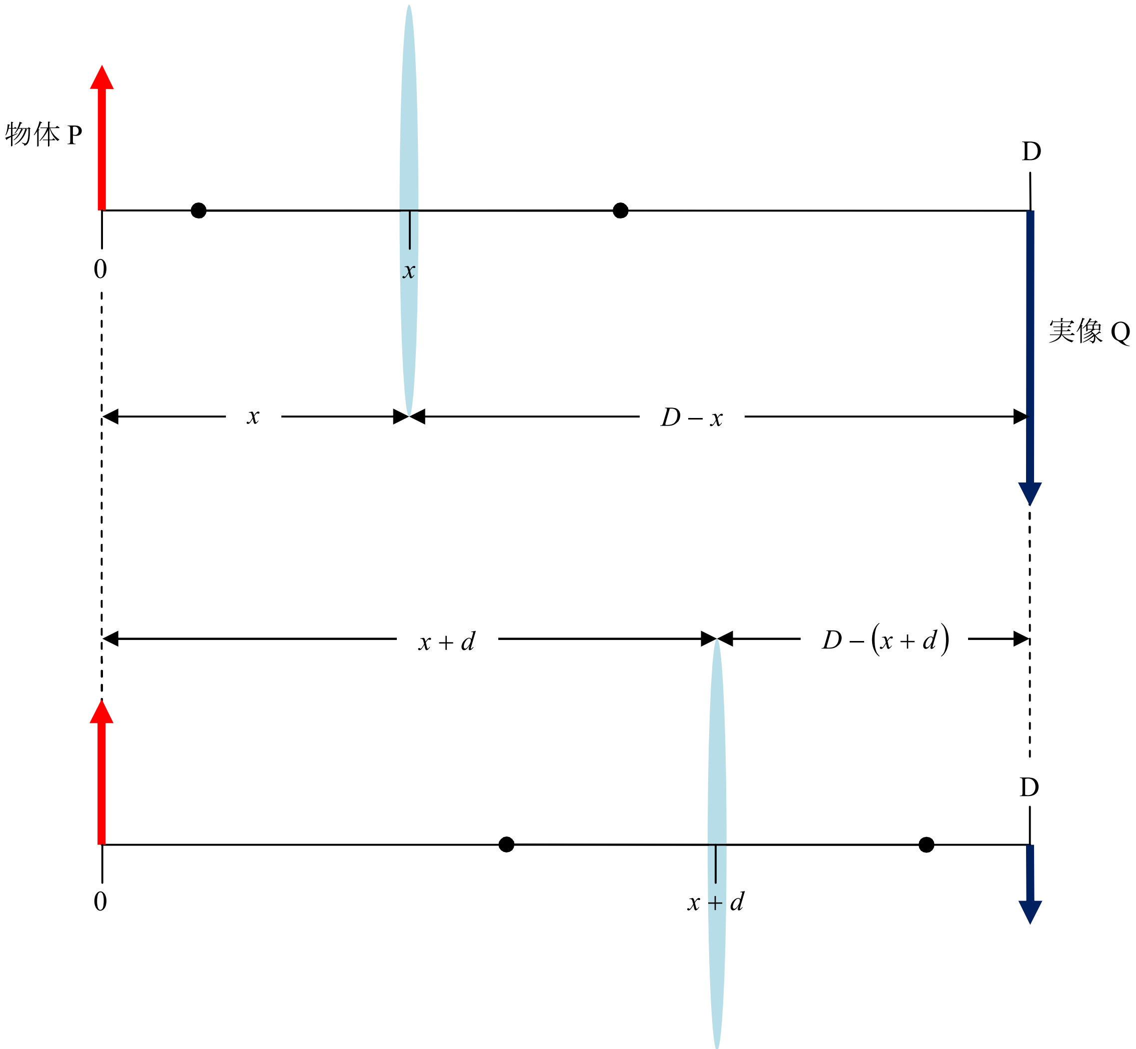
84. 組合せレンズ



(1)

物体 P の位置を 0，拡大像をつくるレンズの位置を x とすると，

レンズの公式より，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}=\frac{1}{f_1}$　　$\therefore \frac{D}{x(D-x)}=\frac{1}{f_1}$　・・・①

$\frac{1}{x+d}+\frac{1}{D-(x+d)}=\frac{1}{f_1}$　　$\therefore \frac{D}{(x+d)\{D-(x+d)\}}=\frac{1}{f_1}$

よって，

$x(D-x)=(x+d)\{D-(x+d)\}$

$\therefore x=\frac{D-d}{2}$

①より，$f_1=\frac{x(D-x)}{D}$

$\therefore f_1=\frac{x(D-x)}{D}=\frac{\frac{D-d}{2}\cdot\frac{d+D}{2}}{D}=\frac{D^2-d^2}{4D}$　・・・(答)

(2)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}=\frac{1}{f_1}$ の両辺を $f_1x(D-x)$ 倍すると，$f_1(D-x)+f_1x=x(D-x)$

$\therefore x^2-Dx+f_1D=0$

よって，求める条件は，

$x^2-Dx+f_1D=0$ が，$0<x<D$ において，異なる 2 実数解をもつことである。

異なる 2 実数解をもつとき，

判別式 $D^2-4f_1D=D(D-4f_1)>0$

$D>0$ より，$D-4f_1>0$

$\therefore D>4f_1$

$D>4f_1$ のときの解を α,β $(\alpha<\beta)$ とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=D>0$，$\alpha\beta=f_1D>0$

よって，$0<\alpha<\beta<D$

ゆえに，求める条件は，$D>4f_1$　・・・(答)

(3)

$x^2 - Dx + f_1 D = 0$ において，

$D > 4f_1$ のときの解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，

条件より， $\beta = \alpha + d$ ・・・②

解と係数の関係より， $\alpha + \beta = D$ ・・・③

②，③より，

$\alpha + (\alpha + d) = D$

$\therefore \alpha = \dfrac{D-d}{2}$

拡大像が得られるのは， $x = \alpha$ のときであり，

このとき，

物体 P と凸レンズの距離 $= \alpha = \dfrac{D-d}{2}$

実像 Q と凸レンズの距離 $= D - \alpha = \dfrac{D+d}{2}$

よって，倍率 $= \dfrac{\dfrac{D+d}{2}}{\dfrac{D-d}{2}} = \dfrac{D+d}{D-d}$ ・・・(答)

(4)

凸レンズがつくるはずだった物体 P の実像 Q が凹レンズの虚物体となり，

凹レンズによりその実像，すなわち組合せレンズの実像ができる。

物体 P と凸レンズの距離を a，

凸レンズがつくるはずだった実像 Q と凸レンズの距離を b とすると，

凸レンズの公式より， $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f_1}$ ・・・④

凸レンズと凹レンズの間隔は無視してよいとあるので，

虚物体（できるはずだった実像 Q）と凹レンズの距離は b，

組合せレンズの実像と凹レンズの距離を b' とすると，

虚物体（できるはずだった実像 Q）は凹レンズのうしろにあるから，

条件より， $-\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{f_2}$ ・・・⑤

④と⑤の各辺の和をとると，

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$ ・・・⑥

a は物体 P と組合せレンズの距離，

b' は組合せレンズの実像と組合せレンズの距離だから，

⑥は組合せレンズの式を表す。

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{f_1+f_2}{f_1 f_2}$$ より，

組合せレンズの焦点距離$=\dfrac{f_1 f_2}{f_1+f_2}$　・・・(答)

(5)

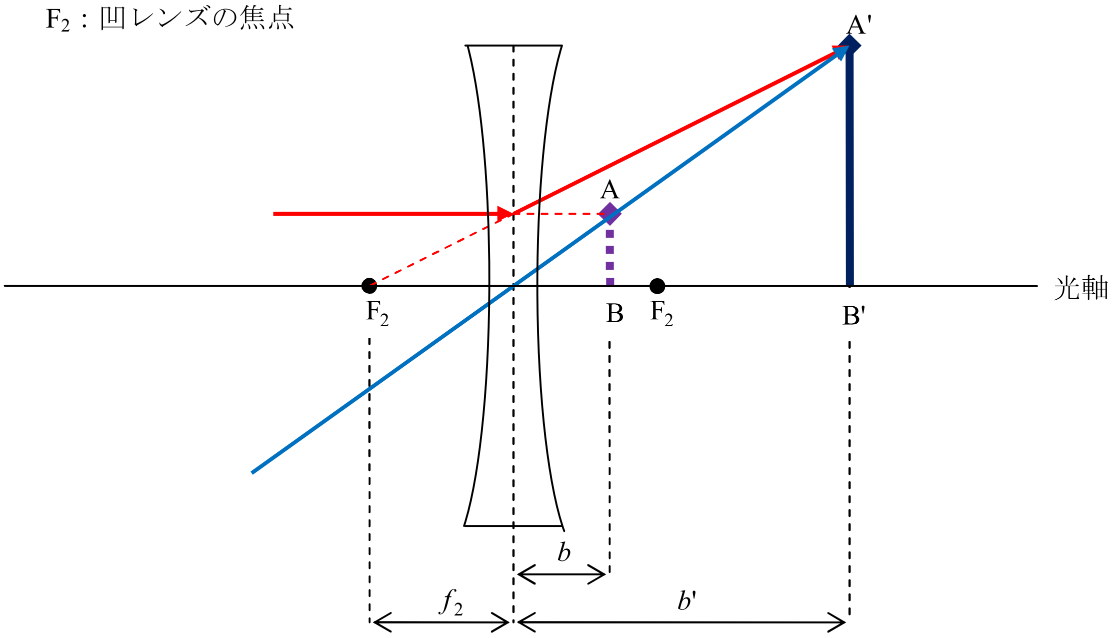
虚物体が凹レンズと凹レンズの焦点の間にあるとき，実像ができる。

虚物体に向かって凹レンズに入射，屈折した光線（赤色の矢印と青色の矢印）が交わり，実像ができる。

AB ：凹レンズの虚物体（凸レンズがつくるはずだった物体 P の実像）

A'B' ：凹レンズがつくる虚物体の実像（組合せレンズの実像）

F_2：凹レンズの焦点



$f=\dfrac{f_1 f_2}{f_1+f_2}$ より，$f_2(f_1-f)=f_1 f$

組合せレンズは実物体（物体 P）の実像をつくるから，

レンズの式は，凸レンズと同じである。(凹レンズは実物体の実像をつくれない)

よって，

$f_2(f_1-f)=f_1 f>0$

⑥より，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{f}$

これと式④$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_1}$について各辺の差をとると，

$\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f}$

図より，$b<b'$だから，$\frac{1}{b}>\frac{1}{b'}$

$\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{b'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f}>0$

$\therefore \frac{1}{f_1}>\frac{1}{f}$

$\therefore f_1<f$

$\therefore f_1-f<0$

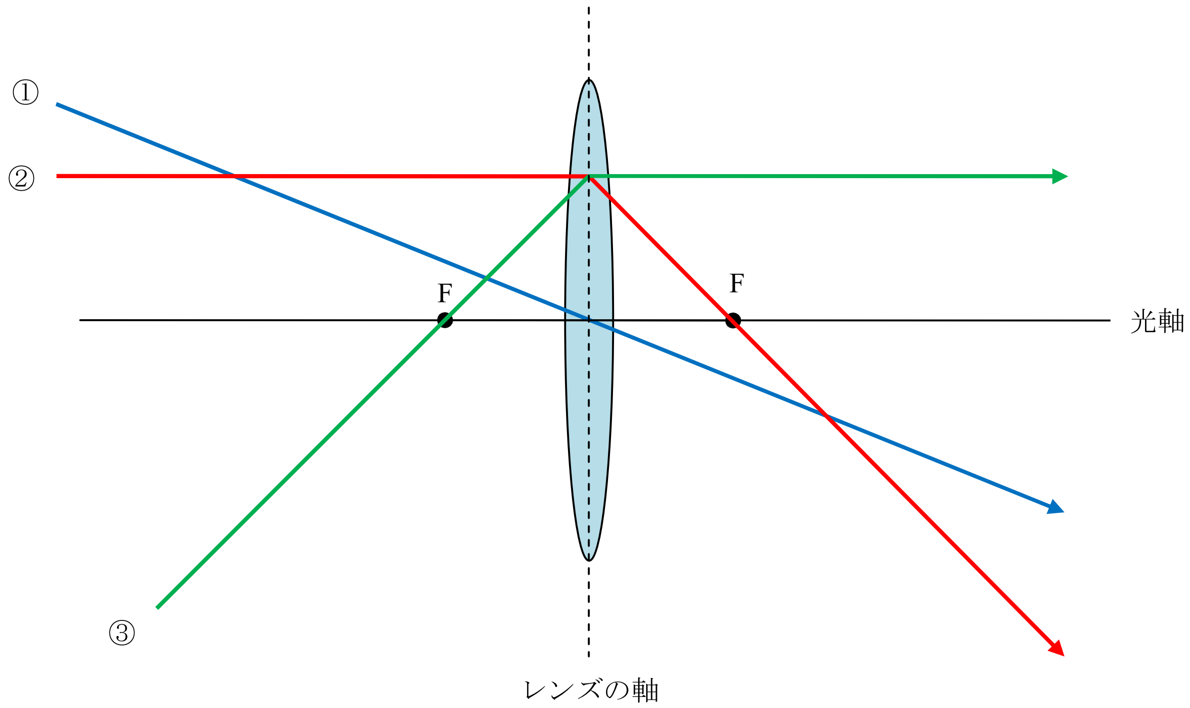
$f_2(f_1-f)>0$ より，

$f_2<0$　・・・(答)

凸レンズと凹レンズ（実像・虚像・実光源・虚光源とレンズの公式）

A. 凸レンズ

凸レンズを通過した光の進み方



光軸：レンズ面に垂直な軸

① レンズの中心を通る光は直進する。

② 光軸に平行にレンズに入った光は，レンズを後方の焦点を通る

③ レンズ前方の焦点を通ってレンズに入った光は，レンズ後方で光軸に平行に進む。

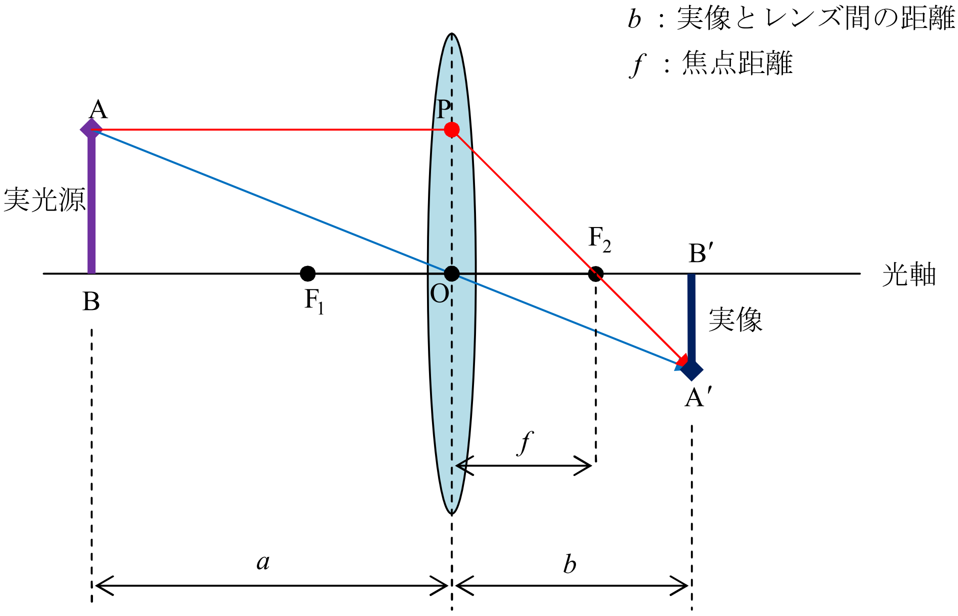
②と③は上図のように描くと，レンズの軸について対称の関係になるから覚えやすい。

凸レンズの公式：実像の場合

a ：実光源（実物体）とレンズ間の距離

b ：実像とレンズ間の距離

f ：焦点距離



$\Delta \mathrm{ABO} \backsim \Delta \mathrm{A'B'O}$ より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B'O}} = \frac{a}{b} \quad \cdots ①$$

$\Delta \mathrm{POF_2} \backsim \Delta \mathrm{A'B'F_2}$ より，

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{F_2O}}{\mathrm{B'F_2}} = \frac{f}{b-f}$$

$\mathrm{PO} = \mathrm{AB}$ より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{f}{b-f} \quad \cdots ②$$

①，②より，$\dfrac{a}{b} = \dfrac{f}{b-f}$

$\therefore ab - af = bf$

$\therefore af + bf = ab$

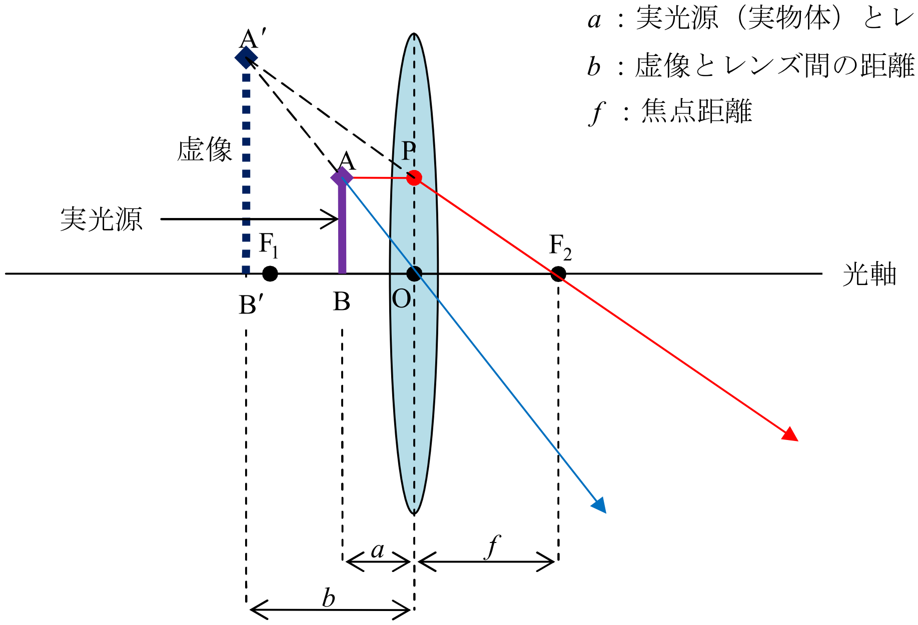
よって，

実像ができるときの凸レンズの公式：$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f} \quad \cdots ③$

凸レンズの公式：虚像の場合

虚像とは

レンズを通過した光線が交わってできる像（実像）ではなく，
その光線を逆方向に延長してはじめて交わる像のこと。
実像は，実際に光線が交わるので，スクリーン上に映すことができるが，
虚像は，光線が交わらないので，スクリーン上に映すことができない。



a ：実光源（実物体）とレンズ間の距離
b ：虚像とレンズ間の距離
f ：焦点距離

$\Delta\mathrm{ABO} \backsim \Delta\mathrm{A'B'O}$ より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B'O}} = \frac{a}{b} \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

$\Delta\mathrm{POF_2} \backsim \Delta\mathrm{A'B'F_2}$ より，

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{F_2O}}{\mathrm{F_2B'}} = \frac{f}{b+f}$$

$\mathrm{PO} = \mathrm{AB}$ より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{f}{b+f} \quad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

①，②より，$\dfrac{a}{b} = \dfrac{f}{b+f}$

$\therefore ab + af = bf$

$\therefore bf - af = ab$

よって，

虚像ができるときの凸レンズの公式：$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f} \quad \cdot\cdot\cdot ⑥$

凸レンズの公式のまとめ

実像ができるとき

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ （a ：実光源とレンズの距離，b ：レンズと像の距離，f ：焦点距離）

虚像ができるとき

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ （a ：実光源とレンズの距離，b ：レンズと像の距離，f ：焦点距離）

虚光源（仮想光源・虚物体）も含めた凸レンズの公式

実像に対し虚像があるように，実光源（実物体）に対し虚光源（仮想光源・虚物体）と呼ばれるものがある。
虚光源（仮想光源・虚物体）とは，実際はそこに光源（実物体）があるわけではないのに，光線を延長すると，延長した光線がそこで収束し，さもそこに光源があるかのように見える仮想の光源のことをいう。
たとえば，実光源（実物体）が凸レンズとその焦点の間にあると虚像ができる。
虚像は，凸レンズを出た光線を逆向きに延長するとできる像なので，
これを凸レンズを通して観察すると，その虚像は実光源（実物体）として目に映る。
よって，凸レンズの虚像を虚光源（仮想光源・虚物体）と見なすこともできる。
虚光源と凸レンズがつくる像を，光は虚光源に向かって進むものとして，つまり虚光源は光を吸収する光源であると見なして作図すると，凸レンズを通過した光線が交わってできる像（実像）と実光源（実物体）が，当然ながら，ぴたりと一致する。
極論すれば，光源と像の関係が入れかわる。

すると，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ において，

a がレンズと像の距離，b が虚光源とレンズの距離にあたるので，
虚光源とレンズの距離を a'，レンズと像の距離を b' とおくと，

$a=b'$，$b=a'$ より，$-\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{f}$ と変形できる。

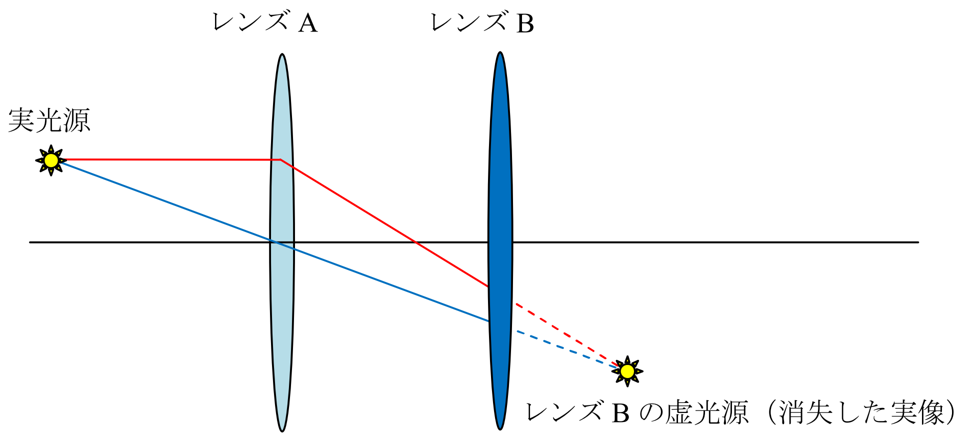
そこで，
虚光源も含めて凸レンズの公式をまとめると，

$\pm\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ （a ：光源とレンズの距離，b ：レンズと像の距離，f ：焦点距離）

ただし，
a については，実光源の場合 a，虚光源の場合 $-a$
b については，実像の場合 b，虚像の場合 $-b$
となる。

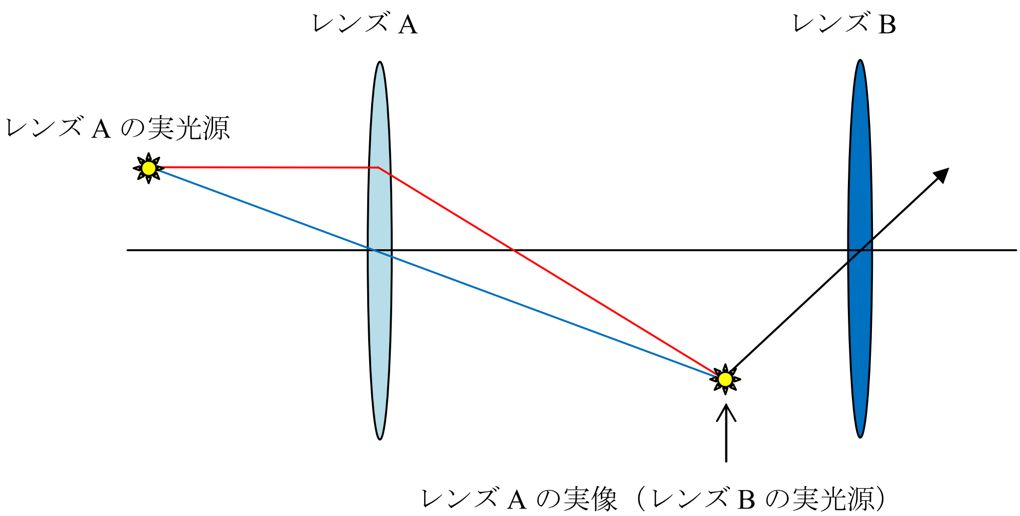
2 枚の凸レンズがつくる像と虚光源

レンズ A とそれを通過した光がつくる実像の間にレンズ B をいれると，
レンズ A がつくる実像は消失するが，その消失した実像をレンズ B の虚光源とすると，
2 枚のレンズがつくる実像を作図することができる。



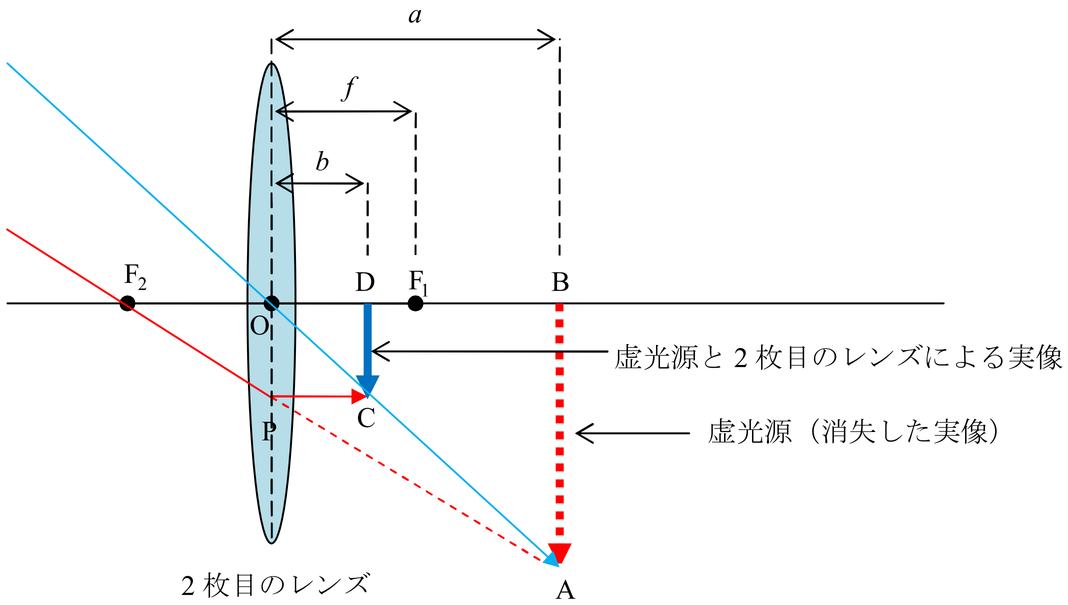
注意

実像は実際に光線が交わってできた像であり，スクリーン上に映すことができるから，
実光源（実物体）と見なせる。よって，レンズ A の実像がレンズ B の前方にできた場合，
その実像はレンズ B の「実光源（実物体）」である。



では，虚光源とレンズの距離を a，レンズと実像の距離を b，焦点距離を f とおいて，

虚光源と実像の間に $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=f$ の関係が成り立つことを作図により確かめてみよう。



作図の仕方

1 枚目のレンズのみの場合の実像 AB を作図後，点 A に向かって直進する光線のうち，

2 枚目のレンズの中心 O を通るものと，2 枚目のレンズの焦点 F_2 を通るものを使う。

中心 O を通るものはそのまま直進し，

焦点 F_2 を通るものは，2 枚目のレンズを通過後，光軸と平行に進むので，

これらの光線が交わり，実像 CD ができる。

証明

$\triangle$CDO∽$\triangle$ABO より，$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{BO}}=\frac{b}{a}$　・・・⑦

$\triangle F_2$AB∽$\triangle F_2$PO より，$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{F_2O}}{\mathrm{F_2B}}=\frac{f}{a+f}$

これと PO＝CD より，$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{f}{a+f}$　・・・⑧

⑦，⑧より，$\frac{b}{a}=\frac{f}{a+f}$

$\therefore -bf+af=ab$

両辺を $\frac{1}{abf}$ 倍すると，$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$

凸レンズのまとめ

凸レンズの公式の表し方 1

$\pm\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$　（a：光源とレンズの距離，b：レンズと像の距離，f：焦点距離）

ただし，

aについては，

実光源（光を放出する光源）の場合：a

虚光源（光を吸収する光源）の場合：$-a$

bについては，

実像（スクリーン上に映せる像）の場合：b

虚像（スクリーン上に映せない）の場合：$-b$

凸レンズの公式の表し方 2

aとbを距離ではなく，凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$

ただし，

aについては，

実光源の場合：$a>0$

虚光源の場合：$a<0$

bについては，

実像の場合：$b>0$

虚像の場合：$b<0$

凸レンズの公式のグラフ化

a と b を凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とする式

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ を用い，変数 a を横軸，変数 b を縦軸とするグラフを描くことにする。

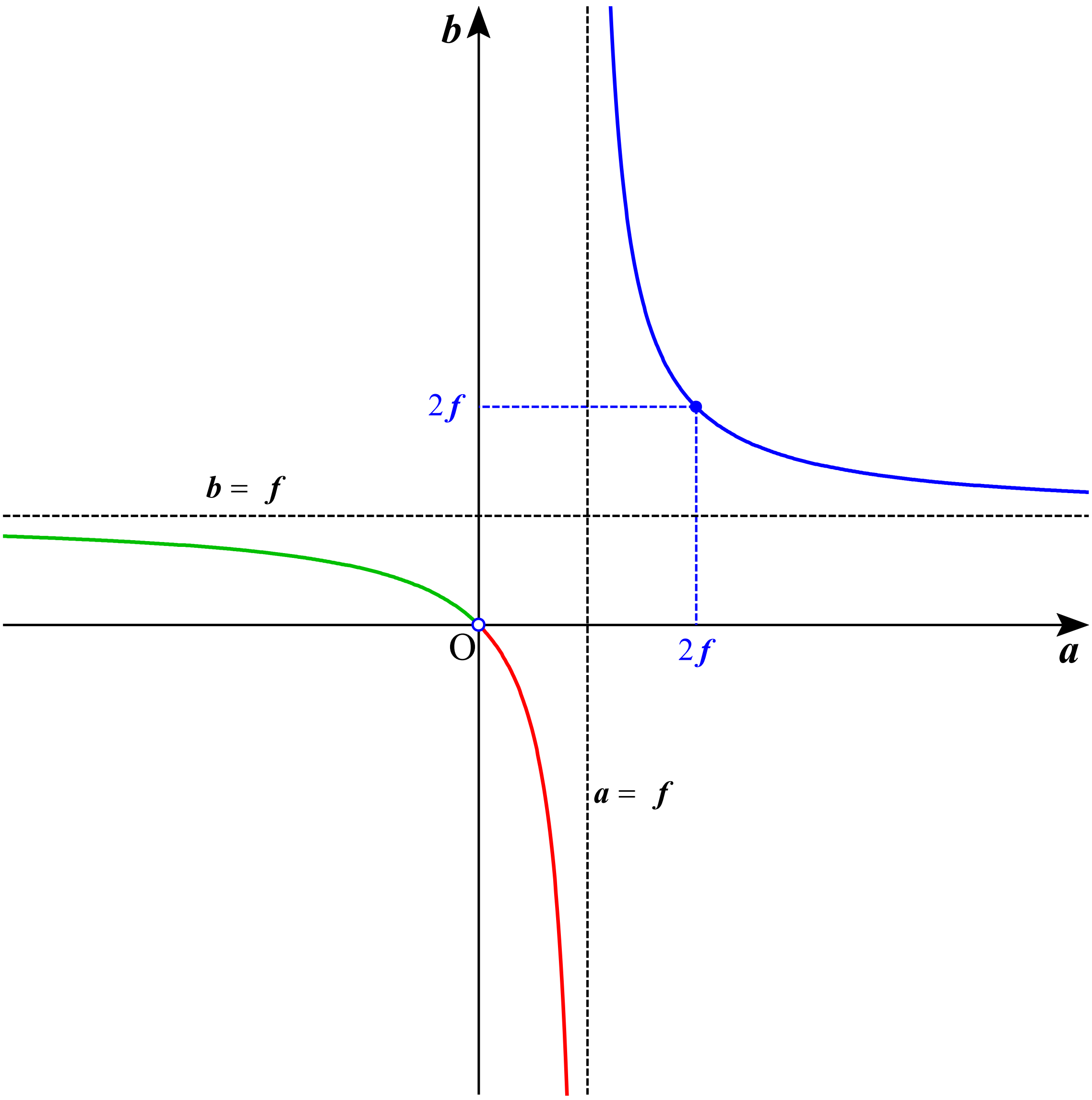
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ より，$bf+af=ab$　$\therefore b=\frac{af}{a-f}=\frac{f(a-f)+f^2}{a-f}$

$\therefore b=f+\frac{f^2}{a-f}$

実光源と実像：$a>f$（青色曲線）

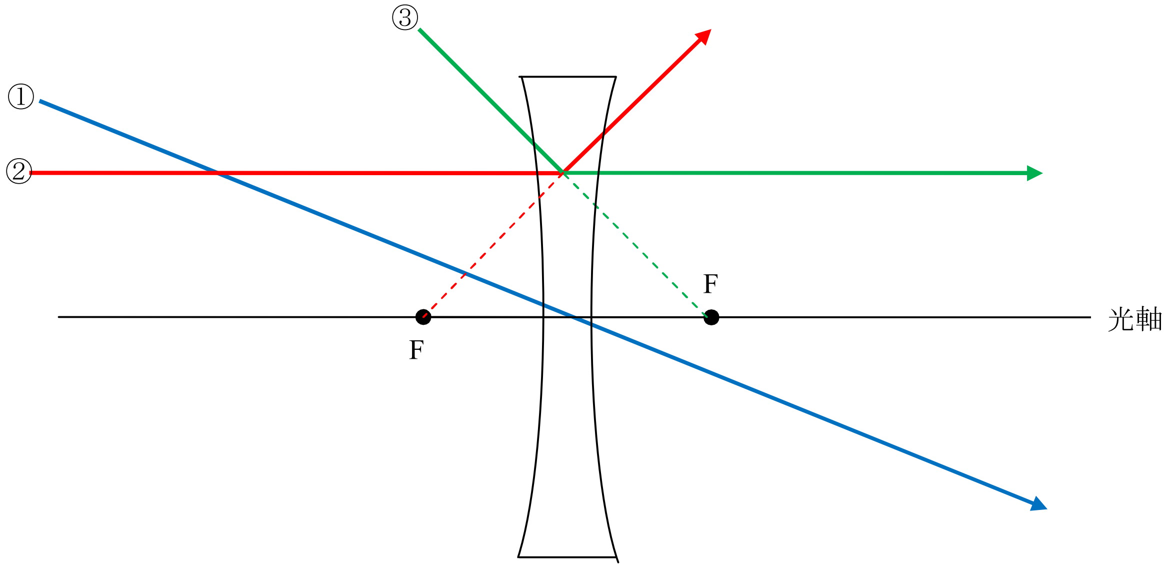
実光源と虚像：$0<a<f$（赤色曲線）

虚光源と実像：$a<0$（緑色曲線）



B．凹レンズ

凹レンズを通過した光の進み方



光軸：レンズ面に垂直な軸

① レンズの中心を通る光は直進する。

② 光軸に平行にレンズに入った光は，レンズ前方の焦点を虚光源とする向きに進む。

③ レンズ後方の焦点方向にレンズに入った光は，光軸に平行に進む。

②と③は上図のように描くと，レンズについて対称の関係になるから覚えやすい。

凹レンズの公式

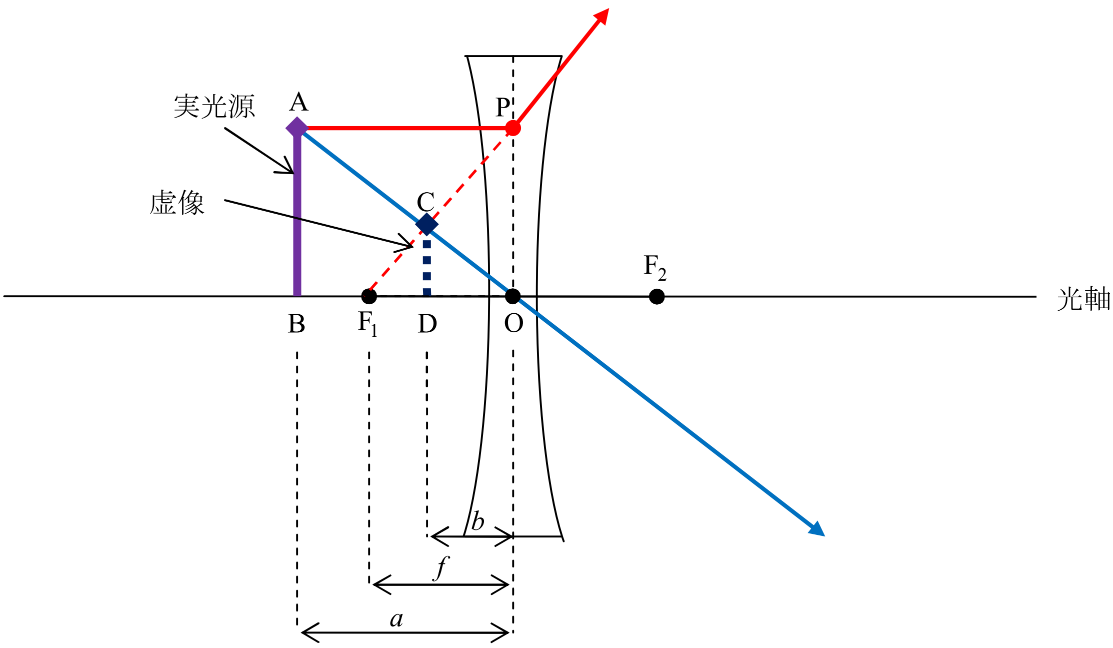
光源とレンズの距離を a，像とレンズの距離を b，焦点距離を f とする。

実光源と虚像の場合

凸レンズの実光源の虚像の作図と同じく，

実光源を出て凹レンズを通過した光線を逆向きに延長すると，

スクリーン上に映せない像，すなわち虚像ができる。



$\triangle$ABO∽$\triangle$CDO より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DO}}=\dfrac{a}{b}$ ・・・⑨

$\triangle \mathrm{POF_1}$∽$\triangle \mathrm{CDF_1}$ より，$\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{F_1O}}{\mathrm{F_1D}}=\dfrac{f}{f-b}$

これと PO＝AB より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{f}{f-b}$ ・・・⑩

①，②より，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{f}{f-b}$ $\quad\therefore bf-af=-ab$

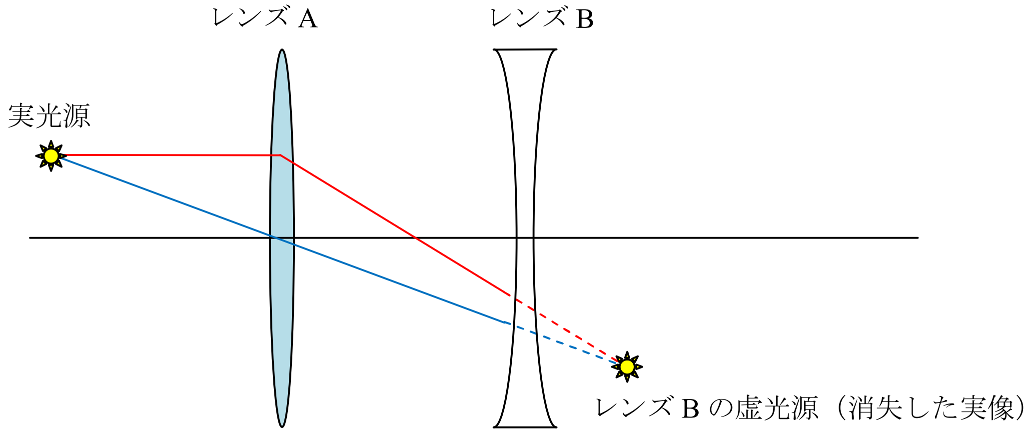
両辺を $\dfrac{1}{abf}$ 倍することにより，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{f}$ ・・・⑪

こうすることで，凸レンズの公式と同じく，実光源の場合 a，虚像の場合 $-b$ となるので，

凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

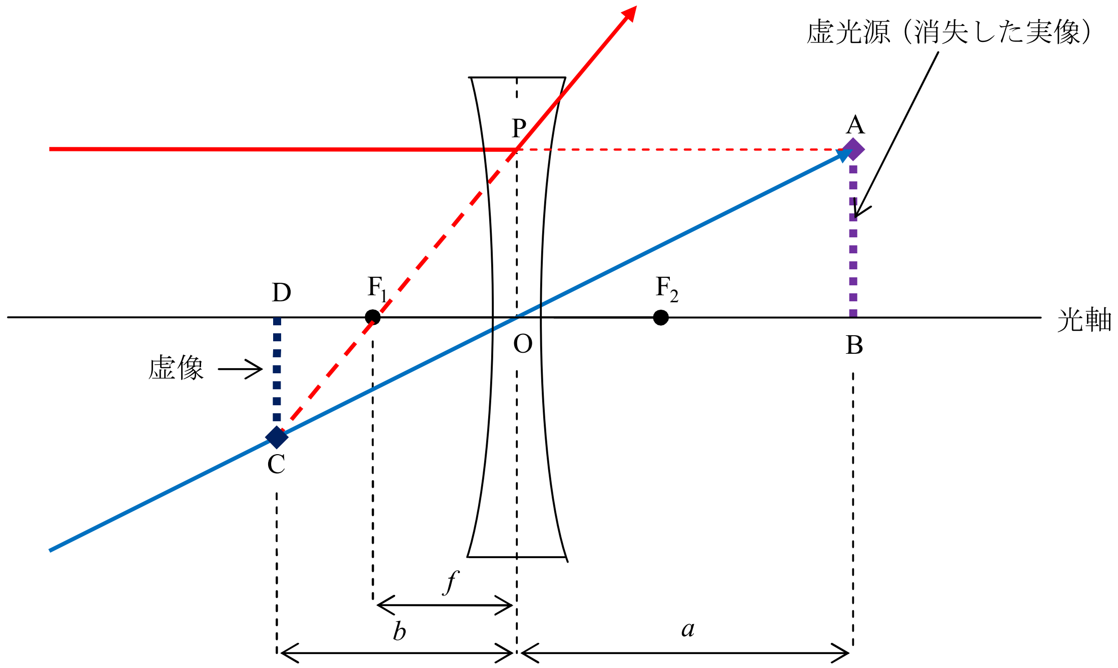
凸レンズと凹レンズがつくる像と虚光源

凸レンズ A とそれを通過した光がつくる実像の間に凹レンズ B をいれると，
凸レンズ A がつくる実像は消失するが，消失した実像を凹レンズ B の虚光源とすると，
2 枚のレンズがつくる像（実像と虚像）を作図することができる。



虚光源が凹レンズの焦点の外側にあるとき，虚像ができる。

虚光源に向かって凹レンズに入射，屈折した光線（赤色の矢印と青色の矢印）を
逆向きに延長すると，虚像ができる。



△ABO∽△CDO より， $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DO}}=\dfrac{a}{b}$ ・・・⑫

△POF$_1$∽△CDF$_1$ より， $\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{F_1O}}{\mathrm{F_1D}}=\dfrac{f}{b-f}$

これと PO = AB より， $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{f}{b-f}$ ・・・⑬

⑫，⑬より， $\dfrac{a}{b}=\dfrac{f}{b-f}$

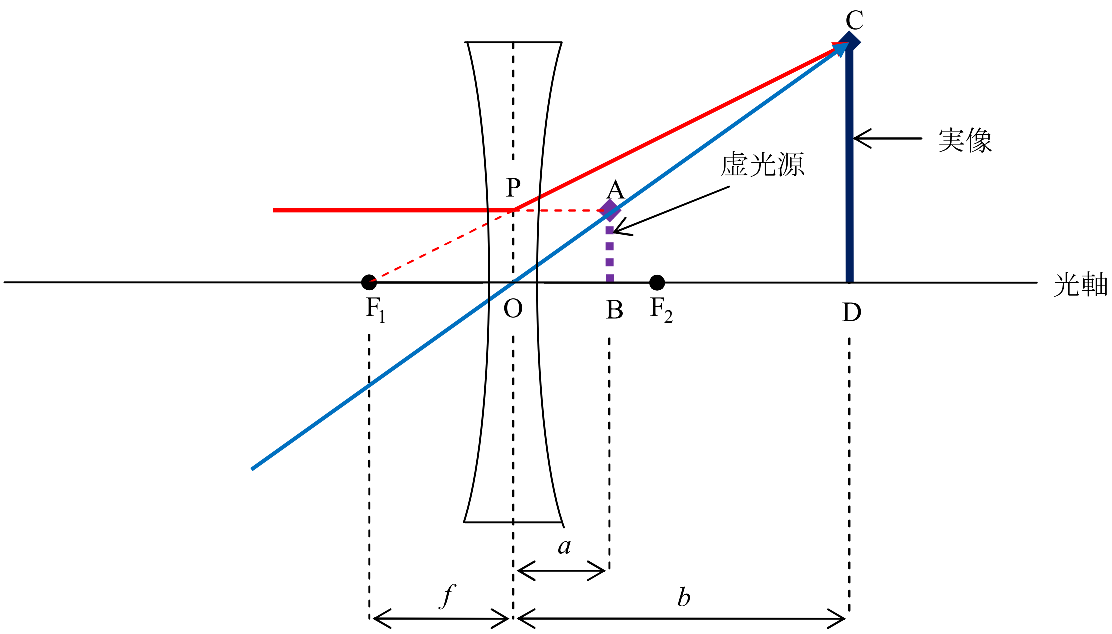
$\therefore -bf-af=-ab$

$\therefore -\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{f}$ ・・・⑭

こうすることで，凸レンズの公式と同じく，虚光源の場合 $-a$，虚像の場合 $-b$ となるので，凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

虚光源が凹レンズと凹レンズの焦点の間にあるとき，実像ができる。

虚光源に向かって凹レンズに入射，屈折した光線（赤色の矢印と青色の矢印）が交わり，実像ができる。



△ABO∽△CDO より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DO}}=\dfrac{a}{b}$ ・・・⑮

△POF$_1$∽△CDF$_1$ より，$\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{F_1O}}{\mathrm{F_1D}}=\dfrac{f}{f+b}$

これと PO = AB より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{f}{f+b}$ ・・・⑯

⑮，⑯より，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{f}{f+b}$

$\therefore -bf+af=-ab$

$\therefore -\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{f}$ ・・・⑰

こうすることで，凸レンズの公式と同じく，虚光源の場合$-a$，実像の場合bとなるので，凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

凹レンズのまとめ

凹レンズの公式の表し方 1

$\pm\dfrac{1}{a}\pm\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{f}$ （a ：光源とレンズの距離， b ：レンズと像の距離， f ：焦点距離）

ただし，

a については，

実光源（光を放出する光源）の場合： a

虚光源（光を吸収する光源）の場合： $-a$

b については，

実像（スクリーン上に映せる像）の場合： b

虚像（スクリーン上に映せない）の場合： $-b$

凹レンズの公式の表し方 2

a と b を距離ではなく，凹レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると，

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{f}$

ただし，

a については，

実光源の場合： $a>0$

虚光源の場合： $a<0$

b については，

実像の場合： $b>0$

虚像の場合： $b<0$

凹レンズの公式のグラフ化

a と b を凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とする式

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{f}$ を用い，変数 a を横軸，変数 b を縦軸とするグラフを描くことにする。

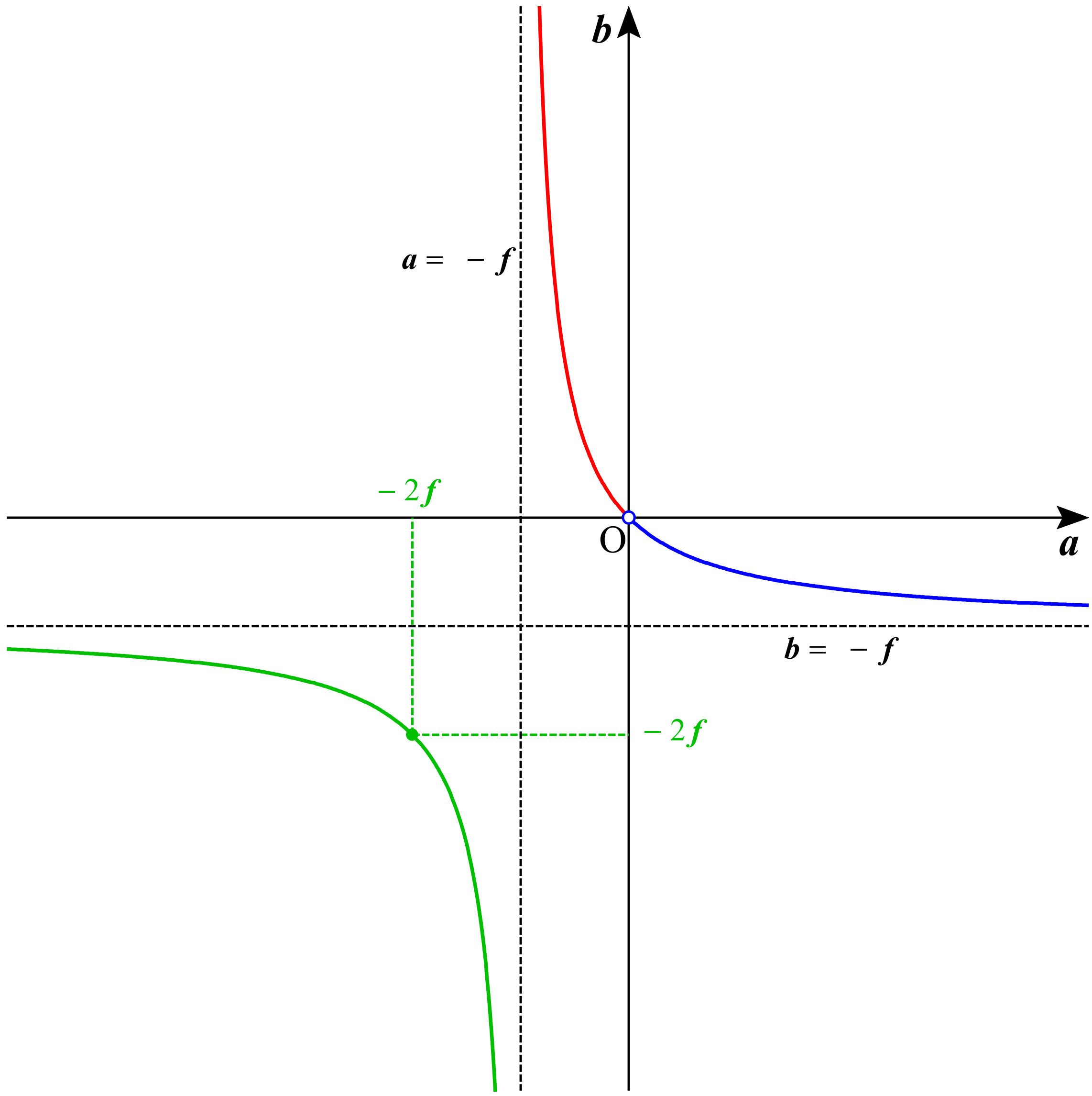
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{f}$ より，$bf+af=-ab$　$\therefore b=\frac{-af}{a+f}=\frac{-f(a+f)+f^2}{a+f}$

$\therefore b=-f+\frac{f^2}{a+f}$

実光源と虚像：$a>0$（青色曲線）

虚光源と実像：$-f<a<0$（赤色曲線）

虚光源と虚像：$a<-f$（緑色曲線）



凸レンズと凹レンズのまとめ

レンズの公式の表し方 1

$\pm\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}=\pm\frac{1}{f}$　（a：光源とレンズの距離，b：レンズと像の距離，f：焦点距離）

ただし，

aについては，

実光源（光を放出する光源）の場合：a

虚光源（光を吸収する光源）の場合：$-a$

bについては，

実像（スクリーン上に映せる像）の場合：b

虚像（スクリーン上に映せない）の場合：$-b$

fについては，

凸レンズの場合：f

凹レンズの場合：$-f$

レンズの公式の表し方 2

aとbを距離ではなく，レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\pm\frac{1}{f}$

ただし，

aについては，

実光源の場合：$a>0$

虚光源の場合：$a<0$

bについては，

実像の場合：$b>0$

虚像の場合：$b<0$

fについては，

凸レンズの場合：f

凹レンズの場合：$-f$