97.　点電荷がつくる電場内での荷電粒子の運動

(1)

(c)

電荷 A が受ける外力を F とすると，

$$F=-\frac{2k_0Q^2}{\left(H^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$=-\frac{2k_0Q^2\left(\frac{1}{H^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(H^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{H^2}\right)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$=-\frac{2k_0Q^2H^{-3}}{\left\{1+\left(\frac{x}{H}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}x$$

$$\approx-\frac{2k_0Q^2}{H^3}x$$

より，

F は x に比例する。すなわち $F=-Kx\ \left(K=\frac{2k_0Q^2}{H^3}\right)$ の形で表される。

よって，

電荷 A は振動中心 $x=0$，振幅 a，周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2k_0Q^2}{H^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{mH^3}{2k_0Q^2}}$ の

単振動運動を行う。

角振動数 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{2k_0Q^2}{mH^3}}=\frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}$，初めの位置 $x=a$ より，

$$x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\omega t=a\cos\left(\frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}\cdot t\right)$$

補足

厳密には，

振幅a，初めの位置を$x=a$とする単振動の式は，

$$x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\omega t \quad (\omega>0)$$

速度 $v=\dfrac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t$

加速度 $\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t=-\omega^2 x$　・・・①

運動方程式より，

$$m\alpha=-\frac{2k_0Q^2}{H^3}x \quad \therefore \alpha=-\frac{2k_0Q^2}{mH^3}x$$　・・・②

①，②より，

$$\omega=\frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}$$

$$\therefore x=a\cos\left(\frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}\cdot t\right)$$

(3)

電荷 A に働く外力は静電気力（保存力）だけだから，力学的エネルギー保存則が成り立つ。

$(0,Y)$における静電気力の位置エネルギーをU_Y，運動エネルギーをK_Y

原点 O における静電気力の位置エネルギーをU_{O}，K_{O}

とすると，

$U_Y+K_Y=U_{\mathrm{O}}+K_{\mathrm{O}}$

$K_Y=0$，$K_{\mathrm{O}}=0$

より，$U_Y=U_{\mathrm{O}}$

ここで，電気量Qの点電荷がつくる電位の基準を無限遠に，

大きさEの一様な電界がつくる電位の基準を$y=Y$にとる。

U_Yについて

電気量Qの点電荷による電位＝$k_0\dfrac{Q}{Y-(-H)}=k_0\dfrac{Q}{Y+H}$

電界Eによる電位＝0

よって，$U_Y=k_0\dfrac{Q^2}{Y+H}$　・・・③

U_{O}について

電気量Qの点電荷による電位＝$k_0\dfrac{Q}{H}=k_0\dfrac{Q}{H}$

電界Eによる電位＝$-EY$

よって，$U_{\mathrm{O}}=k_0\dfrac{Q^2}{H}-QEY$　・・・④

③，④より，

$$k_0\frac{Q^2}{Y+H}=k_0\frac{Q^2}{H}-QEY$$

両辺を$\dfrac{H(Y+H)}{Q}$倍すると，

$$k_0QH=k_0Q(Y+H)-EYH(Y+H)$$
$$k_0QY=EYH(Y+H)$$

$Y\neq 0$より，

$$k_0Q=EH(Y+H)$$

$$\therefore Y+H=k_0\frac{Q}{EH}$$

$\therefore Y=k_0\dfrac{Q}{EH}-H$　・・・(答)

補足

位置エネルギー値は基準位置の位置エネルギーを0とする相対値であるから，
エネルギー保存則においては，エネルギー値の単位さえ統一すれば，
位置エネルギーの同種・異種を問わず，それぞれの位置エネルギーの基準位置を決め，
個々に扱えばよい。