106. 極板間隔と静電エネルギーの変化

表にまとめてから処理すると楽

・スイッチを閉じた時，極板間隔によらず極板間の電圧は一定に保たれる。

・スイッチを開いたとき，極板間隔によらず電荷が一定に保たれる。

　したがって，電気容量と極板間の電圧の積は一定である。

・電気容量は，極板間隔に反比例する。

以上をもとに

各状態の電気容量，電荷，電圧，極板間隔，極板間の電場を表にまとめると，

次のようになる。尚，電気容量については，状態Ⅰの電気容量を C とした。

状態	電気容量	電荷	電圧	極板間隔	極板間電場
Ⅰ	C	Q	V	d_1	$\dfrac{V}{d_1}$
Ⅱ	$\dfrac{d_1}{d_2}C$	Q	$\dfrac{d_2}{d_1}V$	d_2	$\dfrac{V}{d_1}$
Ⅲ	$\dfrac{d_1}{d_2}C$	$\dfrac{d_1}{d_2}Q$	V	d_2	$\dfrac{V}{d_2}$
Ⅳ	C	$\dfrac{d_1}{d_2}Q$	$\dfrac{d_1}{d_2}V$	d_1	$\dfrac{V}{d_2}$

$\boxed{\text{ア}}$

　力は x 軸負の向きであることと，

　B がつくる電場は極板間電場 $\dfrac{V}{d_1}$ の $\dfrac{1}{2}$ であることから，

$$-\frac{QV}{2d_1}$$

$\boxed{\text{イ}}$

　外力と変位の向きのなす角が 0 だから，

$$W_{\text{I–II}}^{\text{外力}}=\left|-\frac{QV}{2d_1}\right||d_2-d_1|\cos 0=\frac{d_2-d_1}{2d_1}QV$$

ウ

$$\frac{d_2}{d_1}V$$

補足

電気容量×電圧＝一定から求めると， $CV = \frac{d_1}{d_2}CV' \therefore V' = \frac{d_2}{d_1}V$

電場×極板間隔から求めると， $V' = \frac{V}{d_1} \cdot d_2 = \frac{d_2}{d_1}V$

エ

$$U_{\mathrm{II}} - U_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}Q \cdot \frac{d_2}{d_1}V - \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}QV\left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right) = \frac{d_2 - d_1}{2d_2}QV$$

オ

$$\frac{d_1}{d_2}Q$$

カ

$$U_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{d_2}{d_1}V = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{d_1}QV$$

$$U_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{d_2}Q \cdot V = \frac{1}{2}\frac{d_1}{d_2}QV$$

$$W_{\mathrm{II-III}}^{電池} = \Delta Q \cdot V = \left(\frac{d_1}{d_2}Q - Q\right)V = \frac{d_1 - d_2}{d_2}QV$$

抵抗から発生するジュール熱を H とすると，

$U_{\mathrm{II}} + W_{\mathrm{II-III}}^{電池} = U_{\mathrm{III}} + H$ より，

$$\begin{aligned}
H &= U_{\mathrm{II}} + \Delta QV - U_{\mathrm{III}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{d_1}QV + \frac{d_1 - d_2}{d_2}QV - \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{d_2}QV \\
&= \frac{QV}{2}\frac{d_2^{\,2} + 2d_1(d_1 - d_2) - d_1^{\,2}}{d_1 d_2} \\
&= \frac{QV}{2}\frac{d_2^{\,2} - 2d_2 d_1 + d_1^{\,2}}{d_1 d_2} \\
&= \frac{(d_2 - d_1)^2}{2d_1 d_2}QV
\end{aligned}$$

キ

$$W_{\text{II}-\text{III}}^{\text{電池}}=\frac{d_1-d_2}{d_2}QV$$

$$W_{\text{IV}-\text{I}}^{\text{電池}}=\left(Q-\frac{d_1}{d_2}Q\right)V=\frac{d_2-d_1}{d_2}QV$$

より，

$$W_{\text{II}-\text{III}}^{\text{電池}}+W_{\text{IV}-\text{I}}^{\text{電池}}=\frac{d_1-d_2}{d_2}QV+\frac{d_2-d_1}{d_2}QV=0$$

ク

$$W_{\text{I}-\text{II}}^{\text{外力}}=\frac{d_2-d_1}{2d_1}QV$$

$W_{\text{III}-\text{IV}}^{\text{外力}}$ については，

外力と変位の向きのなす角が π だから，

$$W_{\text{III}-\text{IV}}^{\text{外力}}=\left|-\frac{d_1}{d_2}Q\cdot\frac{V}{2d_2}\right||d_2-d_1|\cos\pi=-\frac{d_1(d_2-d_1)}{2{d_2}^2}QV$$

よって，外力がした仕事の総計は，

$$\begin{aligned}W_{\text{I}-\text{II}}^{\text{外力}}+W_{\text{III}-\text{IV}}^{\text{外力}}&=\frac{d_2-d_1}{2d_1}QV+\left\{-\frac{d_1(d_2-d_1)}{2{d_2}^2}QV\right\}\\&=\frac{{d_2}^2(d_2-d_1)-{d_1}^2(d_2-d_1)}{2d_1{d_2}^2}QV\\&=\frac{(d_2+d_1)(d_2-d_1)^2}{2d_1d_2}QV\end{aligned}$$

発生するジュール熱を H_{C} とすると，

$U_{\text{I}}+W_{\text{II}-\text{III}}^{\text{電池}}+W_{\text{IV}-\text{I}}^{\text{電池}}+W_{\text{I}-\text{II}}^{\text{外力}}+W_{\text{III}-\text{IV}}^{\text{外力}}=U_{\text{I}}+H_{\text{C}}$ より，

$$H_{\text{C}}=W_{\text{I}-\text{II}}^{\text{外力}}+W_{\text{III}-\text{IV}}^{\text{外力}}=\frac{(d_2+d_1)(d_2-d_1)^2}{2d_1d_2}QV$$