

## 132. RLC 直列回路

(2)

たとえば、b に対する a の電圧を  $V_0$ 、その最大値を  $V_{0\max}$ 、角振動数を  $\omega$  とすると、  
 適当な基準時刻をとることにより、 $V_0 = V_{0\max} \sin \omega t$  と表せる。

よって、a の極板の電荷を  $Q$  とすると、 $Q = CV_{0\max} \sin \omega t \quad \dots \textcircled{1}$

また、極板 a に入出入りする電流を  $I$  とすると、 $I > 0$  のとき  $Q$  は増加するから、

$$I dt = dQ \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= CV_{0\max} \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega CV_{0\max} \cos \omega t \\ &= \omega CV_{0\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega CV_{0\max}$  は最大電流であり、これを  $I_{\max}$  とおくと、

$$I = I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

尚、 $I_{\max} = \omega CV_{0\max} = \frac{V_{0\max}}{\frac{1}{\omega C}}$  とオームの法則  $I = \frac{V}{R}$  より、

$\frac{1}{\omega C}$  はオームの法則の抵抗  $R$  に相当し、この  $\frac{1}{\omega C}$  を容量リアクタンスという。

①, ③より、

コンデンサーを流れる電流の位相を基準にすると、

コンデンサーにかかる電圧の位相はそれより  $\frac{\pi}{2}$  遅れることになる。

つまり、 $V_0$  の位相は回路を流れる電流の位相より  $\frac{\pi}{2}$  遅れている。

よって、コンデンサーと抵抗の直列回路を流れる電流を  $I = I_{\max} \sin \omega t$  とおけば、

$$\text{コンデンサーにかかる電圧は、} V_0 = V_{0\max} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

一方、抵抗にかかる電圧は抵抗が  $1 \Omega$  だから、 $V_1 = 1 \cdot I_{\max} \sin \omega t \quad \dots \textcircled{5}$

また、 $V_1$  の最大値を  $V_{1\max}$  とおくと、 $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max}$

④, ⑤より,  $V_0$  の位相は  $V_1$  より  $\frac{\pi}{2}$  遅れている。

図 2 で, 適当な定数  $A_0, B_0$  を用いると, 波形 A は  $-A_0 \cos \omega t$ , 波形 B は  $B_0 \sin \omega t$  と表せ,  
 $-A_0 \cos \omega t = A_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$  より, 波形 A は波形 B より位相が  $\frac{\pi}{2}$  遅れていることがわかる。  
 よって, 波形 A は  $V_0$ , 波形 B は  $V_1$  である。

(3)

(2)の解説より,  $I_{\max} = \omega C V_{0\max}$ ,  $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max}$

条件より,  $V_{0\max} = 40[\text{V}]$ ,  $V_{1\max} = 40 \times 10^{-3}[\text{V}]$

図 2 より, 周期  $T = 1 \times 10^{-2}[\text{s}]$

よって,

$$\begin{aligned} C &= \frac{I_{\max}}{\omega V_{0\max}} \\ &= \frac{40 \times 10^{-3}}{\frac{2\pi}{1 \times 10^{-2}} \cdot 40} \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 10^{-5}[\text{F}] \end{aligned}$$

(4)

(2)と同様に b に対する a の電圧を  $V_0$  とすると,  $\frac{dI}{dt} > 0$  のとき  $V_0 > 0$  だから,

$I = I_{\max} \sin \omega t$  とすると,

$$\begin{aligned} V_0 &= L \frac{dI}{dt} \\ &= LI_{\max} \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega LI_{\max} \cos \omega t \\ &= \omega LI_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

ここで  $\omega LI_{\max} = V_{0\max}$  とおくと,

$$V_0 = V_{0\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

尚,  $V_{0\max} = \omega LI_{\max}$  とオームの法則  $V = RI$  より,

$\omega L$  はオームの法則の抵抗  $R$  に相当し, これを誘導リアクタンスという。

一方, 抵抗にかかる電圧は  $V_1 = 1 \cdot I_{\max} \sin \omega t$

よって,  $V_0$  の位相は  $V_1$  より  $\frac{\pi}{2}$  進んでおり, 図 3 で  $V_0$  を表す波形は, (2)と同様にして,

B となる。

よって,  $V_{0\max} = 10[\text{V}]$ ,  $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max} = 4[\text{V}]$

また,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \times 10^{-2}} = 2\pi \times 10^2$

$V_{0\max} = \omega L I_{\max}$  より,  $L = \frac{V_{0\max}}{\omega I_{\max}} = \frac{10}{2\pi \times 10^2 \times 4} = \frac{1}{8\pi} \times 10^{-1} [\text{H}]$

(5)

**LCR 直列回路と共振周波数**

LCR 直列回路を流れる電流  $I$  を  $I = I_{\max} \sin \omega t$  とし,

このとき, 交流電源の起電力  $V$  が  $V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  であるとする。

ここで  $V_{\max}$  を一定に保ち, 角振動数  $\omega$  だけを変えていくと,

ある角振動数  $\omega_0$  において回路のインピーダンス, つまり交流回路の抵抗が最小となり, その結果, 最大の電流が回路を流れることになる。

この現象を直列共振, また, 角振動数  $\omega_0$  を与える周波数を共振周波数という。

(共振周波数を  $f_0$  とすると,  $\omega_0 = 2\pi f_0$ )

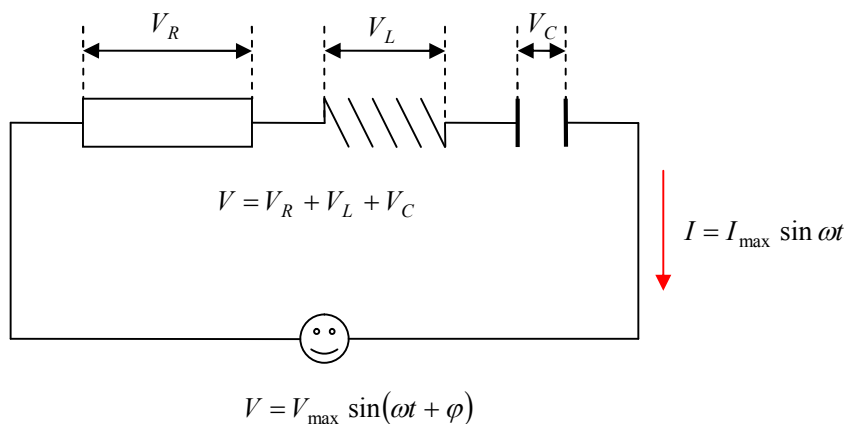
**共振周波数を求める**

コイルの電圧を  $V_L$ , コンデンサーの電圧を  $V_C$ , オーム抵抗の電圧を  $V_R$ ,

電流を  $I = I_{\max} \sin \omega t$ , 交流電源の起電力を  $V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  ( $V_{\max}$  は一定) とする。

キルヒホッフの第二法則より,

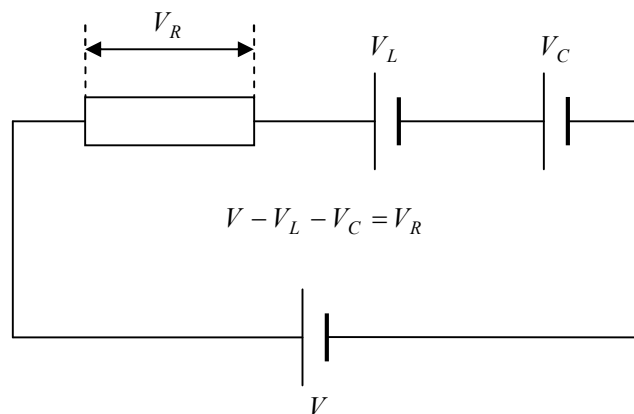
$$\begin{aligned} V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) &= V_R + V_L + V_C \\ &= R I_{\max} \sin \omega t + \omega L I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_{\max}}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= I_{\max} \left\{ R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \omega t \right\} \\ &= I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$



## 補足図

コイルとコンデンサーをそれぞれ起電力  $V_L$  と  $V_C$  の電池に例えると、  
電源の起電力の向きと逆向きだから、

キルヒホッフの第二法則より、 $V - V_L - V_C = V_R \quad \therefore V = V_R + V_L + V_C$



よって、

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \omega$$

また、 $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  は回路の抵抗にあたり、これをインピーダンスという。

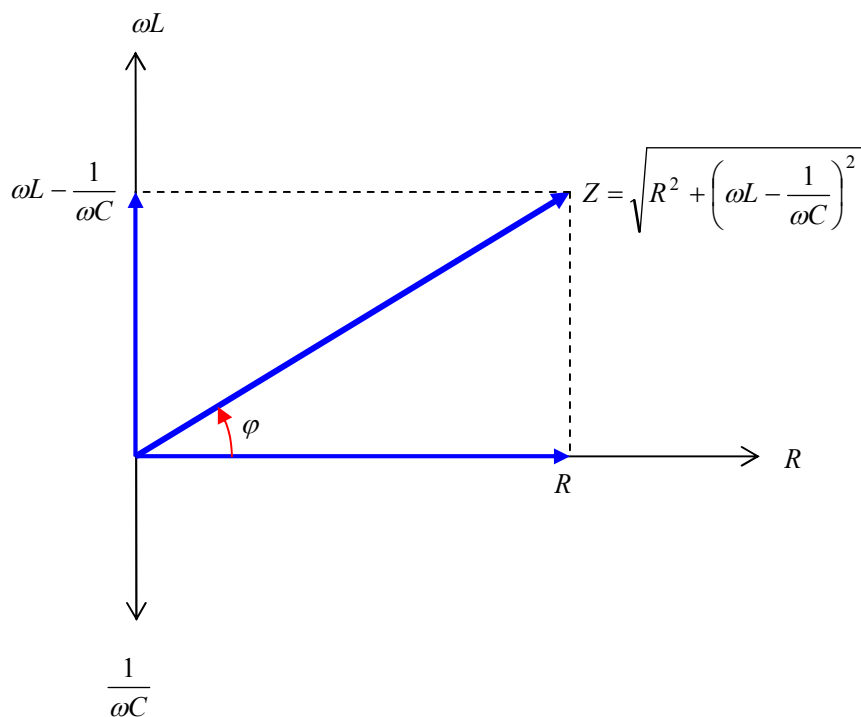
インピーダンスは記号  $Z$  を使って表すので、 $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  となる。

ここで、

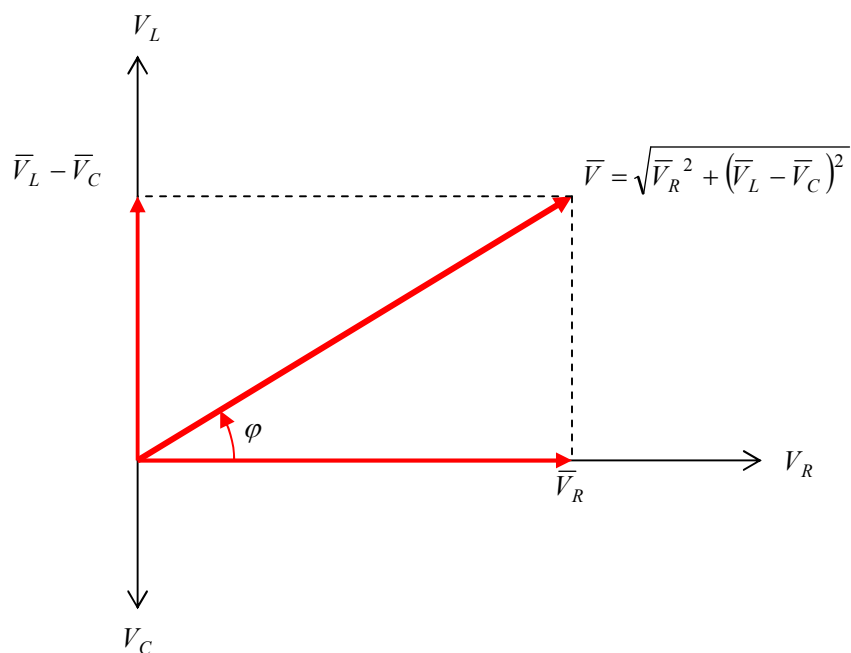
$V_R$  の位相を横軸にとると、 $V_L$  の位相は  $V_R$  より  $\frac{\pi}{2}$  進み、 $V_C$  の位相は  $\frac{\pi}{2}$  遅れるから、

インピーダンス  $Z$ 、オーム抵抗  $R$ 、誘導リアクタンス  $\omega L$ 、容量リアクタンス  $\frac{1}{\omega C}$  の

関係は次のように図示することができる。



また、起電力と電圧の実効値を  $\bar{V}$  ,  $\bar{V}_L$  ,  $\bar{V}_C$  ,  $\bar{V}_R$  とすると、下図のようになる。



ここで  $V_{\max}$  は一定という条件の下,  $I_{\max}$  が最大値をとるのは,

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ より,}$$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ が最小値をとるとき, すなわち } \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \text{ になるときである。}$$

$$\text{このときの角振動数を } \omega_0 \text{ とすると, } \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \text{ より, } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{よって, 共振周波数を } f_0 \text{ とすると, } f_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$$

(6)

#### 交流回路の抵抗での消費電力

$$P_R = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin \omega t = I_{\max} V_{\max} \sin^2 \omega t = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} (1 - \cos 2\omega t) \text{ より,}$$

抵抗での消費電力の時間平均を  $\bar{P}_R$  とすると,  $\cos 2\omega t$  の時間平均は 0 だから,

$$\bar{P}_R = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2}$$

$$\text{また, } \bar{P}_R = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ より,}$$

$\bar{P}_R$  は電流の実効値  $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$  と電圧の実効値  $\frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$  の積である。

#### 交流回路のコイルでの消費電力

$$P_L = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

コイルでの消費電力の時間平均を  $\bar{P}_L$  とすると,  $\sin 2\omega t$  の時間平均は 0 だから,  $\bar{P}_L = 0$

よって, コイルでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコイルに入る電流が増加すると, それが磁気エネルギーとなり,

減少するとき磁気エネルギーが電流となって回路に還元されることによる。

#### 交流回路のコンデンサーでの消費電力

$$P_C = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

コイルでの消費電力の時間平均を  $\bar{P}_C$  とすると,  $\sin 2\omega t$  の時間平均は 0 だから,  $\bar{P}_C = 0$

よって, コンデンサーでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコンデンサーに入る電流が増加すると, それが静電エネルギーとなり,

減少するとき電流となって回路に還元されることによる。