12．斜面をもつ台にはたらく力のつりあい

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が互いに独立であるとすると，
ベクトルと一次独立性より，

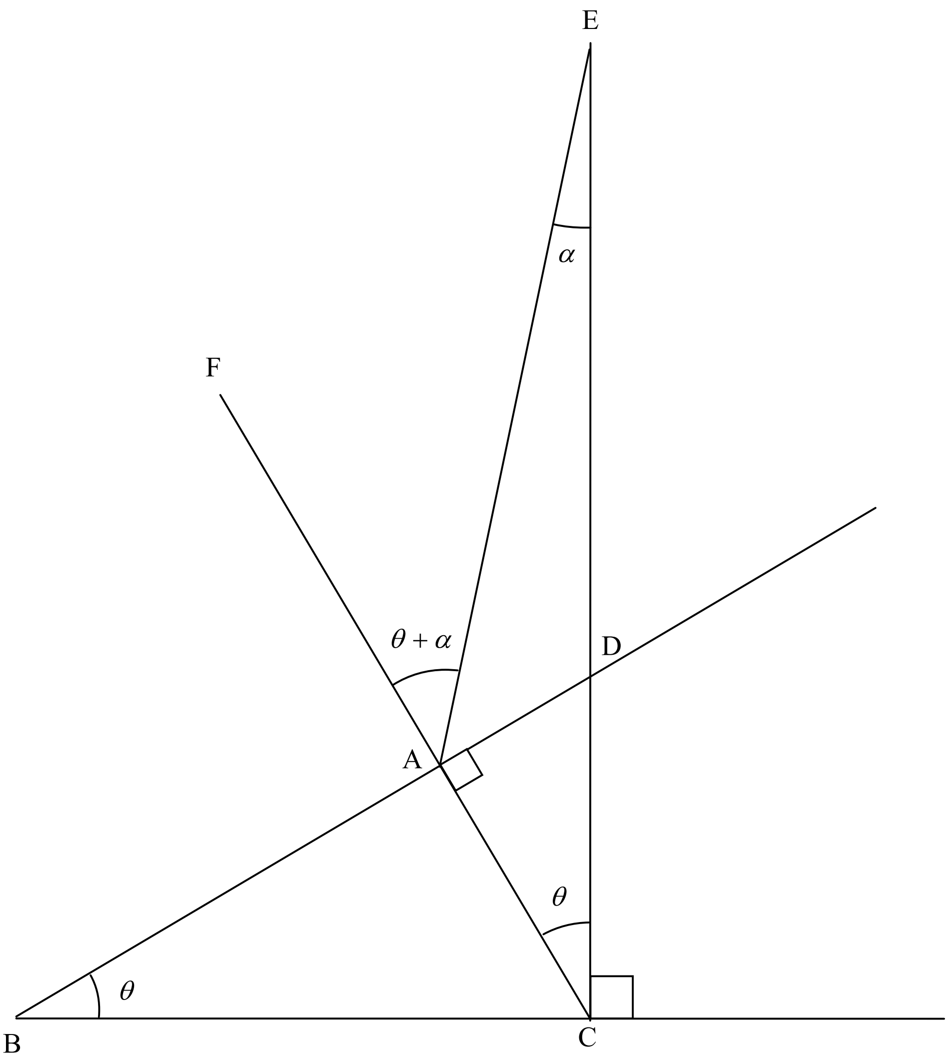
$$p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0} \Leftrightarrow p=q=0$$

力はベクトルであるから，
物体にはたらいている外力 $\vec{F}$ は，任意の互いに独立な 2 つの分力 $p\vec{f}_a$，$q\vec{f}_b$ を使うと，
$p\vec{f}_a+q\vec{f}_b=\vec{F}$ と表され，
$\vec{F}=\vec{0}$ のとき，$p=q=0$ より，$p\vec{f}_a=q\vec{f}_b=\vec{0}$ である。
つまり，
物体にはたらいている外力がつりあっているとき，
どの方向に分力をとっても，それぞれの分力の和は 0 となる。
よって，
分力は式処理しやすい向きにとればよい。

〔**A**〕

(1)

分力をオーソドックスに，斜面に垂直な成分と斜面に沿った成分にした場合



△DBC∽△DCA より，∠DCA＝∠DBC＝θ

よって，△ECA の内角と外角の関係から，

∠EAF＝∠ECA＋∠CEA＝$\theta + \alpha$

これをもとに力を図示すると，下図となる。

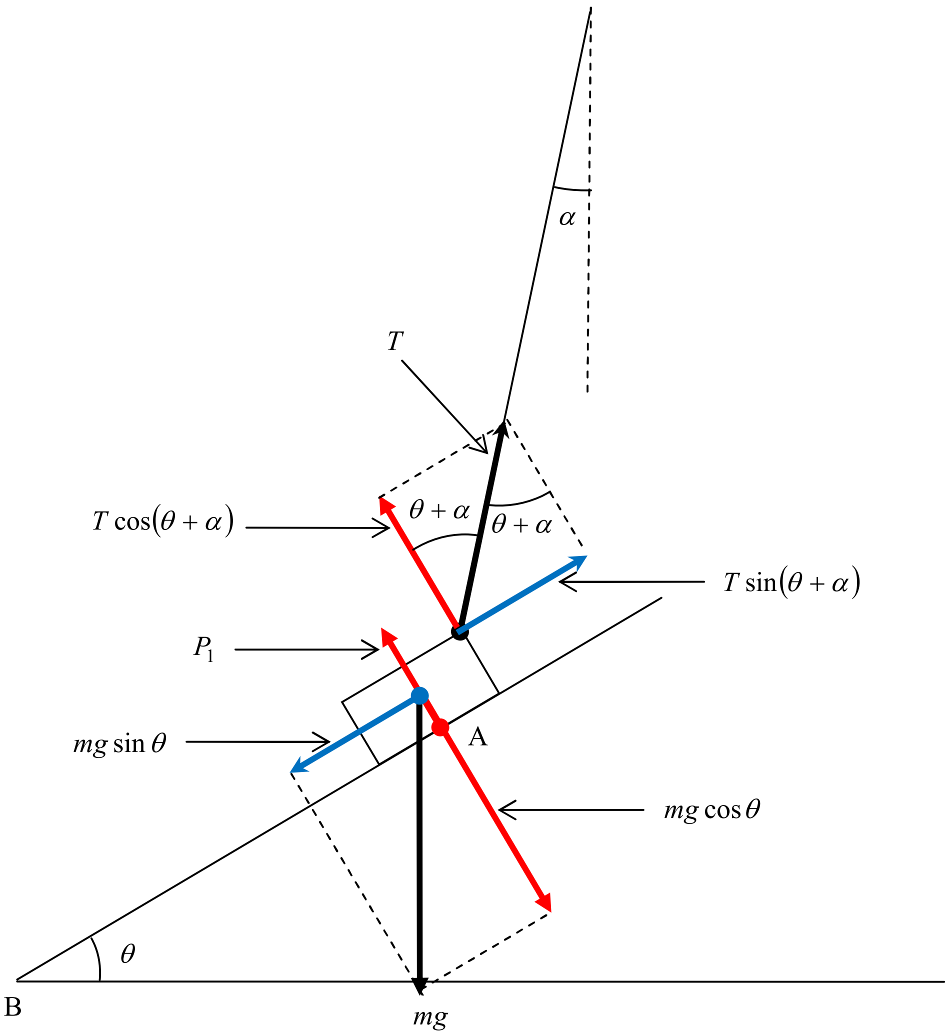
斜面に沿った分力のつりあいより，$T\sin(\theta+\alpha)=mg\sin\theta$　・・・①

斜面に垂直な分力のつりあいより，$P_1+T\cos(\theta+\alpha)=mg\cos\theta$　・・・②

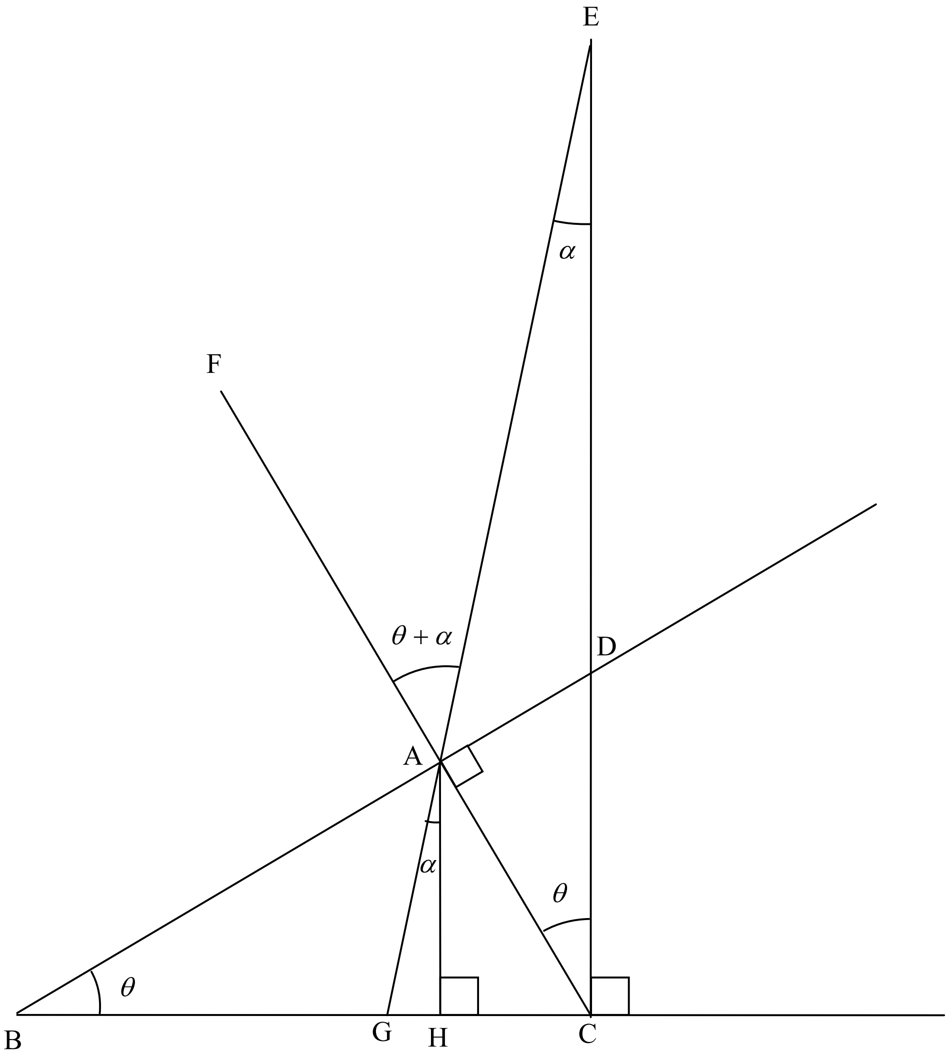
①より，$T=\dfrac{mg\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$

これと②より，

$$
\begin{aligned}
P_1&=mg\cos\theta-\frac{mg\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)}\\
&=\frac{mg\{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta-\sin\theta\cos(\theta+\alpha)\}}{\sin(\theta+\alpha)}\\
&=\frac{mg\sin\{(\theta+\alpha)-\theta\}}{\sin(\theta+\alpha)}\\
&=\frac{mg\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}
\end{aligned}
$$



解答編別解の解説補充



△DBC∽△DCA より，∠DCA＝∠DBC＝θ

よって，△ECA の内角と外角の関係から，

∠EAF＝∠ECA＋∠CEA＝$\theta+\alpha$

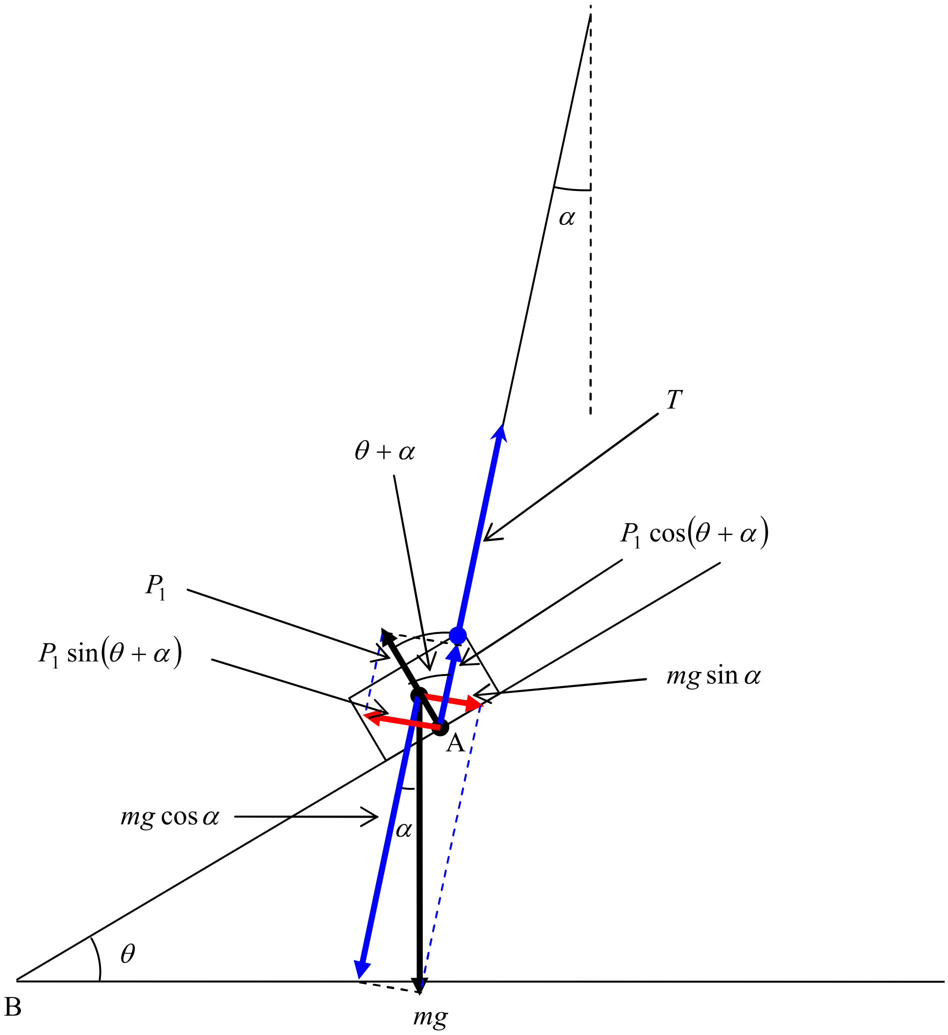
また，AH//EC より，

∠GAH＝∠GEC＝α

これをもとに力を図示すると，下図となる。

$P_1\sin(\theta+\alpha)=mg\sin\alpha$ より， $P_1=\dfrac{mg\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$

これと， $T+P_1\cos(\theta+\alpha)=mg\cos\alpha$ より， $T=\dfrac{mg\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$



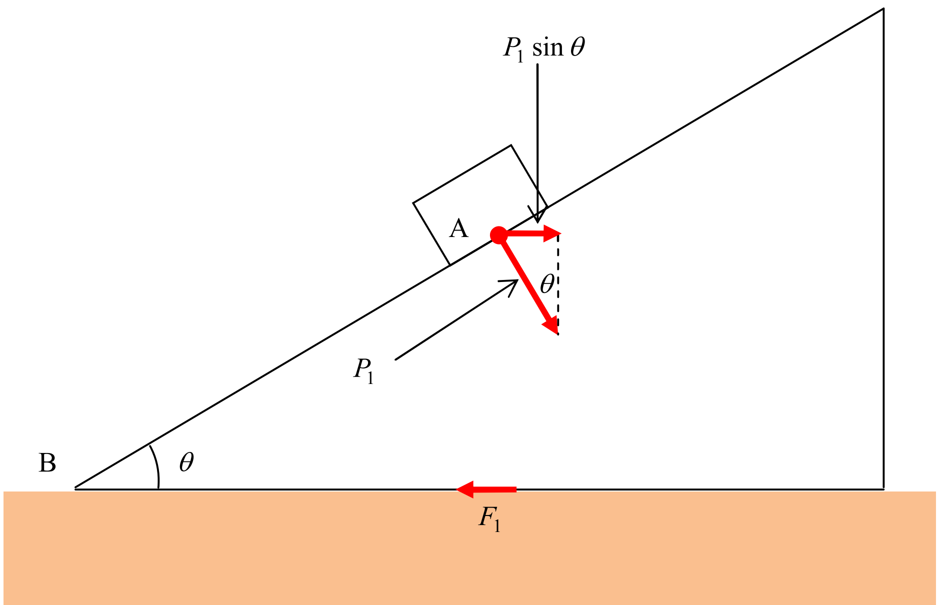
(2)

作用・反作用の関係より，台は小物体から大きさ P_1 の垂直抗力を受ける。

よって，水平方向の力のつりあいより，

$F_1 = P_1 \sin\theta$

$\therefore F_1 = \dfrac{mg\sin\alpha\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$



(4)

同様に，

$F_2 = P_2 \sin\theta$

$\therefore F_2 = mg\cos\theta\sin\theta$

補足

$mg\cos\theta$ は小物体の重力の斜面に垂直な分力であり，小物体が斜面と接触しているとき，この力と小物体が斜面から受ける垂直抗力がつり合っている。

垂直抗力は作用・反作用の力だから，斜面は同じ大きさの垂直を小物体から受ける。

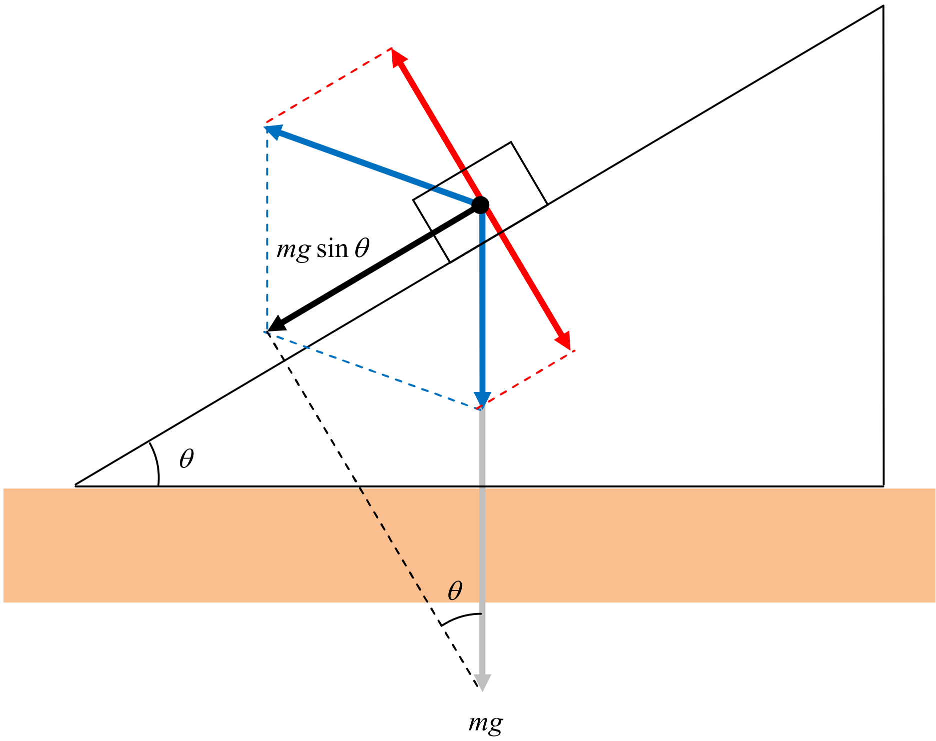
よって，

小物体の重力の斜面に垂直な分力の大きさ $mg\cos\theta$

＝小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさ P_2

＝斜面が小物体から受ける垂直抗力の大きさ P_2

$mg\sin\theta$ は重力の斜面に沿った分力だから，
$mg\sin\theta$ をさらに任意の分力に分解したところで，
斜面に垂直な分力のベクトル和は 0 になってしまう。
つまり，小物体と台との間の抗力を考える上で関係のない力である。
当たり前のことではあるが注意。



黒色ベクトルは mg の斜面に沿った分力ベクトルで，これを青色ベクトルに分解し，
それぞれの斜面に垂直なベクトル成分（赤色）の和をとると，
そのベクトル和は 0 である。