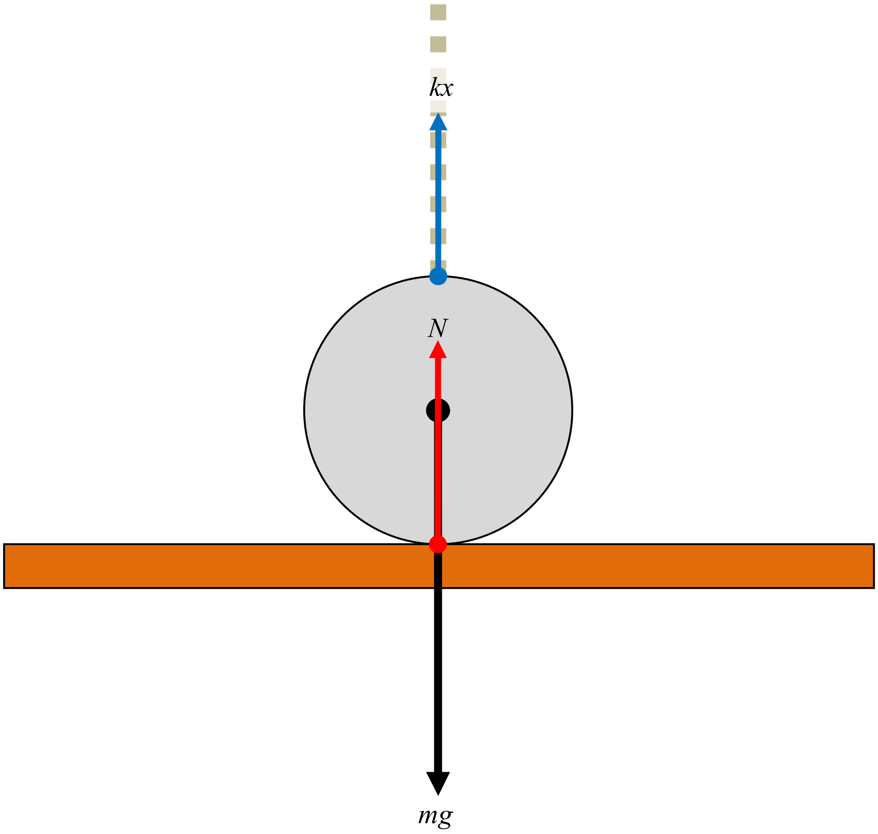
22．力学的エネルギー

ウ

式で解く場合

力が位置により変化する場合は位置と力の関係のグラフの面積から求めるのが鉄則だが，積分の計算から求めることもできる。

板が物体に作用する力は，物体に対する垂直抗力だから，この垂直抗力が仕事をする。



垂直抗力が仕事をするのは，$x=0$ から $N=0$ となる位置，すなわち $x=\frac{mg}{k}$ までだから，

板が物体にする仕事の大きさ $|W_N|$ は，

$$|W_N|=\left|\int_0^{\frac{mg}{k}} N dx\right|=\left|\int_0^{\frac{mg}{k}} (mg-kx)dx\right|=\left|\left[mgx-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{\frac{mg}{k}}\right|=\frac{(mg)^2}{k}-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}=\frac{(mg)^2}{2k}$$

板の物体に対する垂直抗力と物体の変位の向きは逆向きだから，

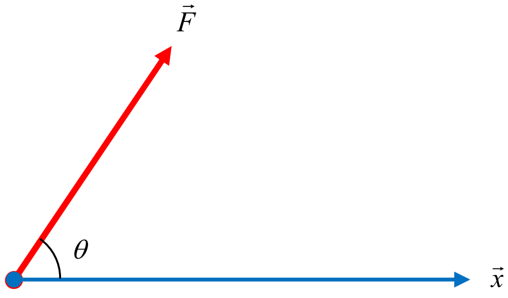
板が物体にした仕事は，

$$W_N=|W_N|\cos 180°=-\frac{(mg)^2}{2k}$$

仕事について

仕事Wは，力ベクトル$\vec{F}$と変位ベクトル$\vec{x}$の内積で与えられる。

$W = \vec{F}\cdot\vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$



力ベクトル$\vec{F}$と変位ベクトル$\vec{x}$が一定ならば，$W = \vec{F}\cdot\vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$で計算すればよい。

弾性エネルギーや万有引力などのように力の大きさが位置によって変化する場合の仕事

弾性力や万有引力の作用線をx軸をとし，位置xにおける力の大きさを$f(x)$，

変位の始点と終点のx座標をそれぞれx_1，x_2とすると，

区分求積法より，仕事の大きさは，

$$|W| = \left|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_2 - x_1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_1 + \frac{k}{n}(x_2 - x_1)\right)\right\}\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|$$

例えば，

ばね定数kのばねの伸びが自然長（$x=0$）からx_1に変位したとき，

弾性力のした仕事の大きさは，

$$|W| = \left|\int_0^{x_1} -kxdx\right| = \frac{1}{2}kx_1^{\ 2}$$

変位ベクトルと弾性力の向きは逆だから，

弾性力のした仕事は，$W = |W|\cos 180^\circ = -\dfrac{1}{2}kx_1^{\ 2}$

弾性力のした仕事＋弾性エネルギー（位置エネルギー）＝0 より，

$x = x_1$における弾性エネルギーは自然長（$x=0$）における弾性エネルギーより，

$\dfrac{1}{2}kx_1^{\ 2}$だけ大きい。

とくに，自然長の弾性エネルギーを 0 とすると，

$x = x_1$における弾性エネルギーは$\dfrac{1}{2}kx_1^{\ 2}$である。

万有引力の場合

質量 m の質点が距離 x 離れた質量 M の質点から受ける万有引力の大きさ $f(x)=G\dfrac{Mm}{x^2}$

質量 m の質点が無限遠から x_1 に変位したときの万有引力がした仕事の大きさ

$$|W|=\left|\int_{\infty}^{x_1} G\frac{Mm}{x^2}dx\right|=\left|\left[-G\frac{Mm}{x}\right]_{\infty}^{x_1}\right|=G\frac{Mm}{x_1}$$

変位の向きと万有引力の向きはどちらも質量 M の質点の向きだから，
質量 m の質点が無限遠から x_1 に変位したときの万有引力がした仕事は，

$$W=|W|\cos 0°=G\frac{Mm}{x_1}$$

万有引力がした仕事＋万有引力のエネルギー（位置エネルギー）＝0 より，
$x=x_1$ における万有引力のエネルギーは無限遠（$x=\infty$）における万有引力のエネルギーより
$G\dfrac{Mm}{x_1}$ だけ小さい。

とくに，無限遠における万有引力のエネルギーを 0 とすると，
$x=x_1$ における万有引力のエネルギーは $-G\dfrac{Mm}{x_1}$ である。

仕事とエネルギー

保存力

ある力の物体にする仕事が，どのような経路をとろうと，
物体のはじめの位置とおわりの位置だけで決まるとき，その力を保存力という。
力の大きさが，一定あるいは常に基準位置からの距離の関数で表され，
力の作用線が，ある軸に平行あるいは，ある1点から湧いているような力は保存力である。
たとえば，

mg で表される重力や qE であらわされるクーロン力，$G\dfrac{Mm}{r^2}$ で表される万有引力，

$k\dfrac{Qq}{r^2}$ で表されるクーロン力，$-Kx$ で表される力などは保存力である。

これらの力はいずれも空間全体を支配し，その性質と特徴づける力（場の力）でもある。
これに対し摩擦力や抵抗力など仕事が経路に依存する力を非保存力という。

保存力と運動エネルギー，保存力の位置エネルギー

保存力がはたらく空間に存在する物体は，位置だけで決まるエネルギーをもち，
そのエネルギーを保存力の位置エネルギーあるいは単に位置エネルギーという。
物体がもつ保存力の位置エネルギーは，保存力がした仕事の分だけ減少し，
物体の運動エネルギーは，保存力が物体にした仕事の分だけ増加する。
つまり，
はじめの位置エネルギーを U_1，おわりの位置エネルギーを U_2，
はじめの運動エネルギーを K_1，おわりの運動エネルギーを K_2，保存力がした仕事を W
とすると，

$U_1 - W = U_2$　・・・①

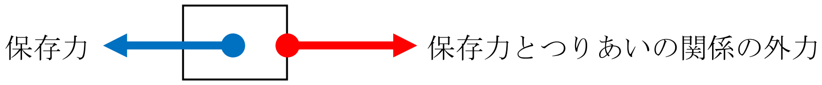
$K_1 + W = K_2$　・・・②

と表される。
よって，①＋②より，$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$ が成り立つ。
すなわち
物体にする仕事が保存力だけのとき，位置エネルギー＋運動エネルギー＝一定
が成り立つ。
たとえば，物体がクーロン力と重力のみを受ける場合，
クーロン力の位置エネルギー＋重力の位置エネルギー＋運動エネルギー＝一定
となる。

保存力とつりあいの関係の外力が物体に仕事をしたときの位置エネルギー

保存力とつりあいの関係の外力で物体に W の仕事をしたとき，

保存力の向きと外力の向きは反対向きだから，保存力がした仕事は $-W$ となる。



よって，式①より，$U_1-(-W)=U_2$

$\therefore U_1+W=U_2$

つまり，

はじめの位置エネルギー＋保存力とつりあう外力がした仕事＝おわりの位置エネルギー

保存力とつりあいの関係の外力が物体に仕事をするとき，

その仕事の分だけ物体の保存力の位置エネルギーが増加する。

非保存力がはたらいているとき

非保存力がした仕事だけ力学的エネルギーが変化する。

$U_1+K_1+W_F=U_2+K_2$

すなわち，

位置エネルギーと運動エネルギーの和は，物体が受けた非保存力の仕事の分だけ変化する。