37. 板に打ちこまれた弾丸

[A]

(2)

別解：運動方程式から力積へ

弾丸が板の表面に接してから止まるまでの時間をΔtとする。

このときの弾丸の加速度をαとすると，$\alpha=\dfrac{0-v_0}{\Delta t}=-\dfrac{v_0}{\Delta t}$　・・・①

一方，$F=\dfrac{m{v_0}^2}{a}$および弾丸の運動方程式：$m\alpha=-F$より，

$$a=-\frac{F}{m}=-\frac{{v_0}^2}{a}\quad・・・②$$

①，②より，

$$\frac{v_0}{\Delta t}=\frac{{v_0}^2}{a}$$

よって，

$$\Delta t=\frac{a}{v_0}$$

補足

運動方程式から力積へ

質量mの物体が一定の外力fを時間Δt受け，その速度がv_1からv_2に変化したとき，

物体の加速度をaとすると，$a=\dfrac{v_2-v_1}{\Delta t}$　・・・③

物体の運動方程式：$ma=f$　・・・④

③，④より，

$$m\cdot\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=f$$

よって，

$$mv_2-mv_1=f\Delta t$$

つまり，

物体の運動量変化＝物体が受けた力積

運動量変化と力積の直感的理解

物体の速度を変える効果は物体の運動方向の外力の大きさに比例することは明らか。

外力が同じ場合，その効果は外力を加えた時間に比例することも明らか。

よって，物体の速度を変える効果は，「外力×時間」に比例する。

[B]

(1)

弾丸と板が一体となって等速となったときの速度をVとする。

弾丸は板から抵抗力$-F$を受け，その速度がVに，

板は弾丸から抵抗力の反作用力Fを受け，その速度がVになる。

弾丸が板の表面に接してから速度がVになるまでの時間をΔtとすると，

弾丸の加速度をαとすると，

その運動方程式は，$m\alpha = -F$

これと，$\alpha = \dfrac{V - v_0}{\Delta t}$より，

$$m \cdot \frac{V - v_0}{\Delta t} = -F$$

よって，

$mV - mv_0 = -F\Delta t$ ・・・⑤

板の加速度をβとすると，

その運動方程式は，$M\beta = F$

これと，$\beta = \dfrac{V - 0}{\Delta t}$より，

$$M \cdot \frac{V - 0}{\Delta t} = F$$

よって，

$MV = F\Delta t$ ・・・⑥

⑤＋⑥より，

$mV - mv_0 + MV = 0$

$\therefore (m + M)V = mv_0$

$\therefore V = \dfrac{m}{m + M} v_0$ ・・・(答)

別解

運動量が保存されているから，重心は等速度運動する。

つまり，衝突前の重心の速度がそのまま保たれる。

衝突前の重心の速度をv_{G}とすると，

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{mv_0 + M \cdot 0}{m + M} = \frac{m}{m + M} v_0$$

一体となったときの速度をVとすると，Vは重心の速度そのものだから，

$V = v_{\mathrm{G}} = \dfrac{m}{m + M} v_0$ ・・・(答)

補足 1

運動量変化と力積と運動量保存則

外力が作用・反作用の関係の力のとき，

それぞれの物体の「運動量変化＝受けた力積」の関係式の和をとると，

力積の和が 0 になり，さらに式の両辺を整理すると，

「変化前の運動量の和＝変化後の運動量の和」が得られる。

すなわち運動量保存則が成り立つ。

補足 2

運動量保存則と重心の速度

運動量が保存されている質点系のそれぞれの質点の質量を m_i，速度を v_i とすると，

運動量保存則より，$\sum(m_i v_i) = $ 一定 が成り立つ。

一方，質点系の重心の速度を v_{G} とすると，$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{\sum(m_i v_i)}{\sum m_i}$

$\sum(m_i v_i) = $ 一定 より，

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{\sum(m_i v_i)}{\sum m_i} = \text{一定}$$

よって，

運動量が保存されている質点系の重心は等速度運動をする。

また，

$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{\sum(m_i v_i)}{\sum m_i}$ より，

$$\left(\sum m_i\right) v_{\mathrm{G}} = \sum(m_i v_i) = \text{一定}$$

よって，

運動量が保存されている質点系の重心の運動量は一定である。

(2)

別解：相対速度と相対加速度から解く

右向きを正とする。

弾丸の加速度

弾丸の加速度を α とすると，弾丸は板から大きさ F の抵抗力を左向きに受けるから，

運動方程式は，$m\alpha = -F$

$$\therefore \alpha = -\frac{F}{m} \quad \cdots ⑦$$

板の加速度

板の加速度を β とすると，板は弾丸から抵抗力の反作用を右向きに受けるから，

運動方程式は，$M\beta = F$

$$\therefore \beta = \frac{F}{M} \quad \cdots ⑧$$

板から見た弾丸の加速度

板から見た弾丸の加速度を $A_{\beta\alpha}$ とすると，

⑦－⑧より，

$$A_{\beta\alpha} = -\frac{F}{m} - \frac{F}{M} = -\frac{M+m}{mM}F \quad \cdots ⑨$$

弾丸が板の表面に接したときの板から見た弾丸の速度

$$v_0 - 0 = v_0 \quad \cdots ⑩$$

弾丸と板が一体となったときの板から見た弾丸の速度

弾丸と板の速度が等しくなったときだから，

板から見た弾丸の速度は 0　・・・⑪

⑨，⑩，⑪より

板から見た弾丸の変位を x とすると，

$$0 - {v_0}^2 = 2 \cdot -\frac{M+m}{mM}F \cdot x$$

$$\therefore x = \frac{mM{v_0}^2}{2(m+M)F}$$

$F = \dfrac{m{v_0}^2}{a}$ より，

$$x = \frac{mM{v_0}^2}{2(m+M)} \cdot \frac{a}{m{v_0}^2} = \frac{M}{2(m+M)}a \quad \cdots (答)$$

運動量保存と運動エネルギー保存について

質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

証明

重心の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{X}$，$\vec{V}$
質点の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{x}_i$，$\vec{v}_i$ で表すと，

$$\vec{X} = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{M} \quad \left(M = \sum m_i\right)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\sum m_i \left(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right)}{M} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$\therefore M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{v}_i - \vec{V}\right)^2 &= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2} - \vec{V}\sum m_i\vec{v}_i + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{V}^2 \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2} - \vec{V}\sum m_i\vec{v}_i + \frac{1}{2}M\vec{V}^2 \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2} - \vec{V}M\vec{V} + \frac{1}{2}M\vec{V}^2 \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2} - M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}M\vec{V}^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}
\end{aligned}$$

重心から見た質点の運動量の総和は 0 である。

証明

式①より，

$$\sum m_i\vec{v}_i - M\vec{V} = 0$$

ここで，$M\vec{V} = \sum m_i\vec{V}$ より，

$$\sum m_i\vec{v}_i - \sum m_i\vec{V} = 0$$

$$\sum m_i\left(\vec{v}_i - \vec{V}\right) = 0$$

$m_i\left(\vec{v}_i - \vec{V}\right)$は重心から見た質点の運動量を表す。
よって，
重心から見た質点の運動量の総和は 0 である。

質点の運動量の総和が保存される⇔重心の運動エネルギーが保存される

証明

式①の右辺は質点の運動量の総和を表している。

よって，質点の運動量が保存されるとき，$\vec{C}$ を定ベクトルとすると，$\sum m_i \vec{v}_i = \vec{C}$

$M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$ より，

$M\vec{V} = \vec{C}$

$\vec{V} = \dfrac{\vec{C}}{M}$

よって，重心の速度 $\vec{V}$ は一定である。

ゆえに，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ は一定，すなわち重心の運動エネルギーは保存される。

同様に，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ が一定のとき，$\sum m_i \vec{v}_i$ が一定である。

すなわち質点の運動量の総和は保存される。

補足

「質点の運動エネルギー＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギー」
より，質点の運動エネルギーが保存されるとき，重心の運動エネルギーも保存される。
重心の運動エネルギーが保存されることと質点の運動量が保存されることは同値だから，
このとき質点の運動量も保存される。
しかし，質点の運動量が保存されても，重心の運動エネルギーは保存されるが，
質点の運動エネルギーが保存されるとは限らない。
つまり，
「質点の運動エネルギーが保存される⇒質点の運動量が保存される」は常に成り立つが，
逆は常には成り立たない。