38. 床や壁との斜めの衝突

(1)

ボールの速度の水平成分は $v_0 \cos 60° = \dfrac{v_0}{2}$ の等速度運動をするから,

壁に当たるときのボールの速度の水平成分も $\dfrac{v_0}{2}$ である。

水平方向に対して右斜め下 30° の角度で壁に当たるから,
ボールの鉛直下向きの速さを v_y とすると,

$$\frac{v_y}{\frac{v_0}{2}} = \tan 30°$$

$$\therefore v_y = \frac{v_0}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

よって，鉛直上向きを正とすると,
壁に当たるときのボールの鉛直方向の速度は,

$$-v_y = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

これと,

鉛直方向の速度＝$v_0 \sin 60° - gt = \dfrac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt$ より,

$$\frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g} \quad \cdot\cdot\cdot（ア）$$

別解：2 次関数の相似性を利用して解く

放物運動だから，ボールの軌道は 2 次関数で表すことができる。

2 次関数同士は相似の関係にあり，その相似比は x^2 の係数の逆数の絶対値の比である。

たとえば，$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は，$\left|\dfrac{1}{a}\right|$ ： $\left|\dfrac{1}{b}\right|$ より，$|b|$ ： $|a|$ である。

（ア）別解

水平右向きを始線とすると，

打ち出されたボールの速度の傾きは，$\tan 60° = \sqrt{3}$

壁に当たるときのボールの速度の傾きは，$\tan 150° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ボールの軌道は $y=-x^2$ と相似だから，$y=-x^2$ に置き換えると，

ボールが打ち出されたときと壁に当たるときの位置の水平成分は，

それぞれ，$y=-x^2$ の接線の傾きが $\sqrt{3}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標と対応する。

$y'=-2x$ より，接線の傾きが $\sqrt{3}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，

$$-2x_1=\sqrt{3} \quad \therefore x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-2x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore x_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

頂点の x 座標は 0 だから，

x_1 と頂点の x 座標の距離は $|x_1|$，x_2 と頂点の x 座標の距離は $|x_2|$ であり，$|x_1|$ ： $|x_2|=3$ ： 1

この比は，2 次関数の相似性より，ボールの打ち出し点から最高到達点までの水平距離とボールの最高到達点から壁との衝突点までの水平距離の比が 3:1 であることを示している。

したがって，

打ち出されてから最高点に達するまでの時間を t_1，

最高到達点から壁に当たるまでの時間を t_2 とすると，

ボールの速さの水平成分は $v_0\cos 60°$ だから，

$$v_0\cos 60°\cdot t_1 : v_0\cos 60°\cdot t_2 = |x_1| : |x_2| = 3 : 1$$

$$\therefore t_1 : t_2 = 3 : 1$$

よって，ボールが打ち出されてから壁に当たるまでの時間 t_1+t_2 は，

$$t_1+t_2=t_1+\frac{1}{3}t_1=\frac{4}{3}t_1 \quad \cdots ①$$

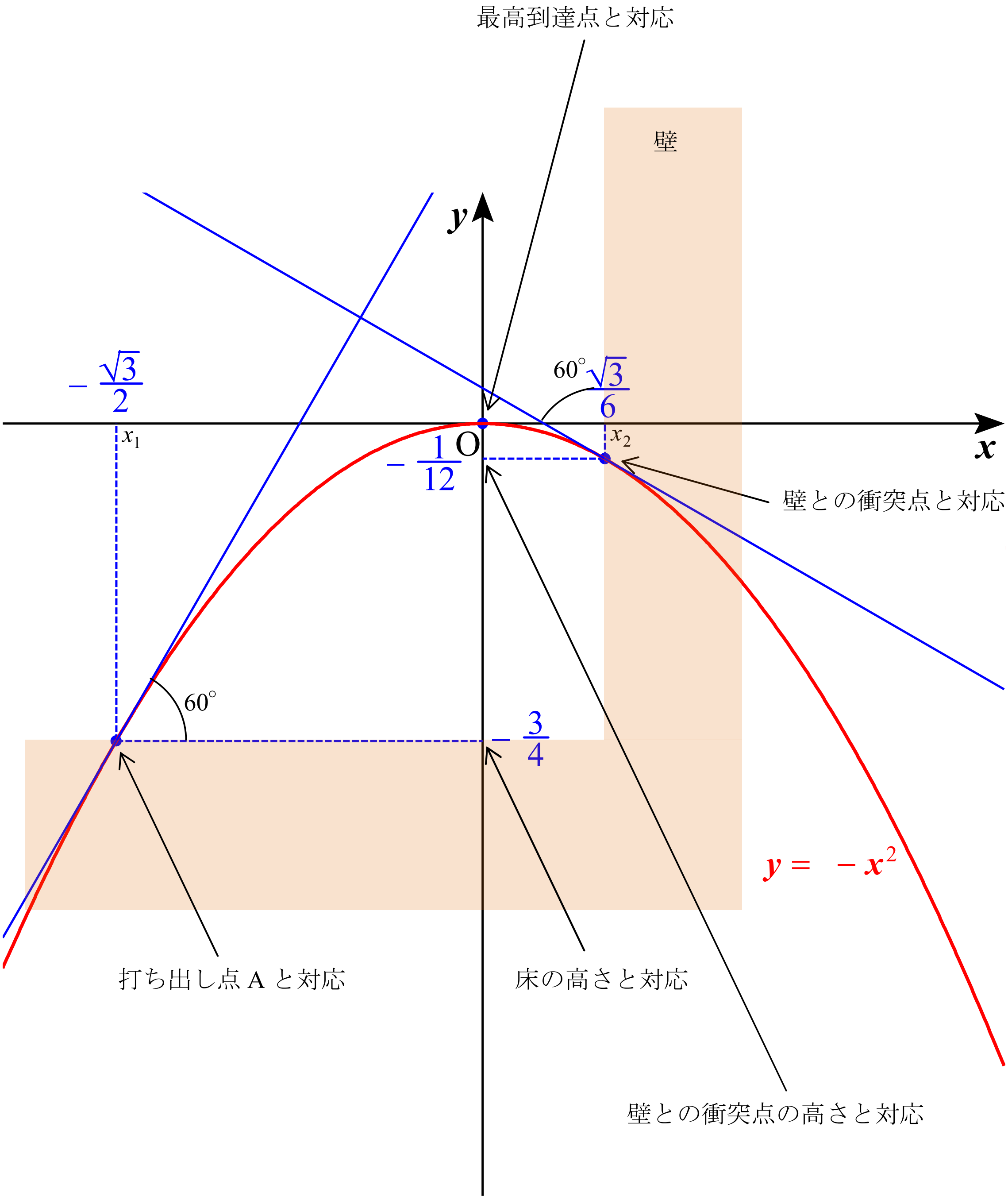
ボールの速度の鉛直成分 $v_0\sin 60°-gt$ が，最高到達点で 0 になることより，

$$v_0\sin 60°-gt_1=\frac{\sqrt{3}v_0}{2}-gt_1=0$$

$$\therefore t_1 = \frac{\sqrt{3}v_0}{2g} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①，②より，

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3}t_1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}v_0}{2g} = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g} \quad \cdot\cdot\cdot (ア)$$



(イ)別解

図より，

最高到達点の床からの高さ：壁との衝突点の床からの高さ＝$\frac{3}{4}$ ：$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)$＝9：8

最高到達点の床からの高さを h とすると，

最高到達点では，鉛直方向の速度が 0 になるから，

$0-(v_0\sin 60°)^2=2\cdot(-g)\cdot h$ より， $h=\frac{3v_0^{\ 2}}{8g}$

よって，壁との衝突点の床からの高さは，

$\frac{8}{9}h=\frac{8}{9}\cdot\frac{3v_0^{\ 2}}{8g}=\frac{v_0^{\ 2}}{3g}$ ・・・(イ)

(2)

(エ) 別解

鉛直方向の速度は壁と平行だから，衝突の影響を受けない。

よって，

最高到達点から床に衝突するまでの時間＝打ち出してから最高到達に達するまでの時間＝t_1

また，(ア) 別解の解説より，最高到達点に達してから壁と衝突するまでの時間 $t_2=\frac{1}{3}t_1$

よって，壁に衝突してから床に衝突するまでの時間を t_3 とすると，

$t_3=t_1-t_2=t_1-\frac{1}{3}t_1=\frac{2}{3}t_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}v_0}{2g}=\frac{\sqrt{3}v_0}{3g}$

速度の水平成分は壁に垂直だから，衝突の影響を受ける。

反発係数 e より，衝突後の速度の水平成分の大きさは，

$e\times v_0\cos 60°=\frac{ev_0}{2}$

よって，

1 回目に床に衝突する地点は，

壁から

$\frac{ev_0}{2}t_3=\frac{ev_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}v_0}{3g}=\frac{\sqrt{3}ev_0^{\ 2}}{6g}$ ・・・(エ)

(カ)

補足

鉛直成分は，鉛直打ち上げ運動だから，高さが同じ点でのボールの速さは等しい。

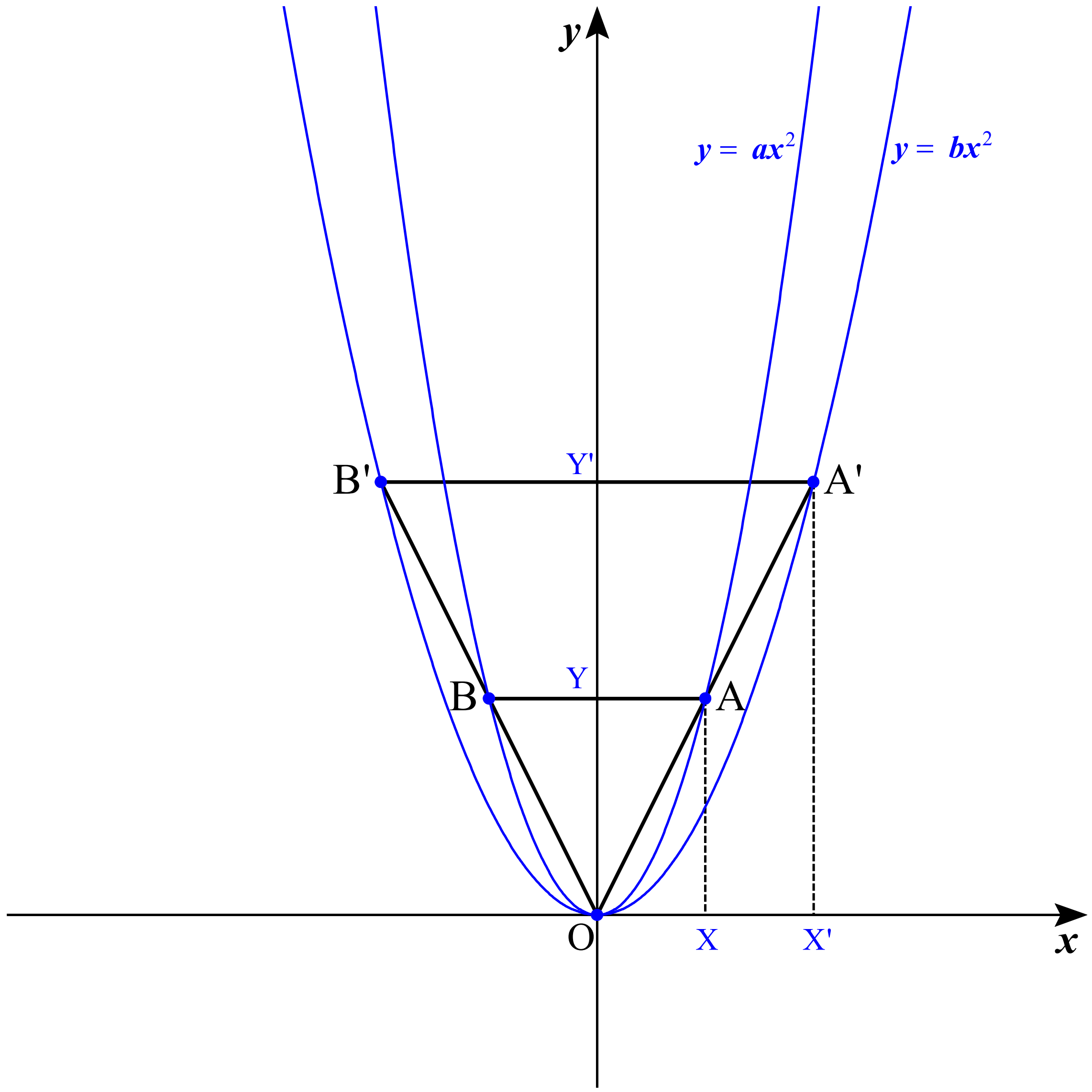
よって，床に衝突する直前の速さの鉛直成分＝打ち上げ時の速さの鉛直成分

2 次関数の相似比と相似中心

実数係数の 2 次関数はすべて相似あるいは合同であり，

たとえば， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $\left|\dfrac{1}{a}\right|:\left|\dfrac{1}{b}\right|=|b|:|a|$ である。

ここで， $a>0$， $b>0$ の場合を考え，その相似比を求めてみる。



図より，△OABと△OA'B'の相似比が $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比である。

$y=ax^2$ 上の任意の点を (X,Y) とすると，

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$

両辺を $\dfrac{a}{b}$ 倍すると，$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=\dfrac{a^2}{b}\mathrm{X}^2$

よって，

$$\frac{a}{b}\mathrm{Y}=b\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}\right)^2$$

これは，$\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$ が $y=bx^2$ 上の点であることを示している。

よって，図より，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X},\frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A'は，$y=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}x$ と $y=bx^2$ との交点より，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}},\frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}\right)$$

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$ より，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{a\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}}=a\mathrm{X}$，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\frac{\mathrm{Y}}{a}}=a\mathrm{Y}$ だから，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X},\frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

対応する点の接線の傾きは等しい

2 次関数の相似だから，対応する点の接線の傾きは等しくて当然だが，

一応確かめてみよう。

$y=ax^2$ 上の点 A における接線の傾きを m とすると， $y'=2ax$ より， $m=2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ 上の点 A' における接線の傾きを m' とすると， $y'=2bx$ より， $m'=2b\mathrm{X}'$

ここで， $\mathrm{X}'=\dfrac{a}{b}\mathrm{X}$ だから， $m'=2b\mathrm{X}'=2b\cdot\dfrac{a}{b}\mathrm{X}=2a\mathrm{X}$

よって， $m=m'$

別解 2

△OAB と△OA'B' において，対応する点の接線の傾きは等しいことを使うと，

$y=ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2b\mathrm{X}'$

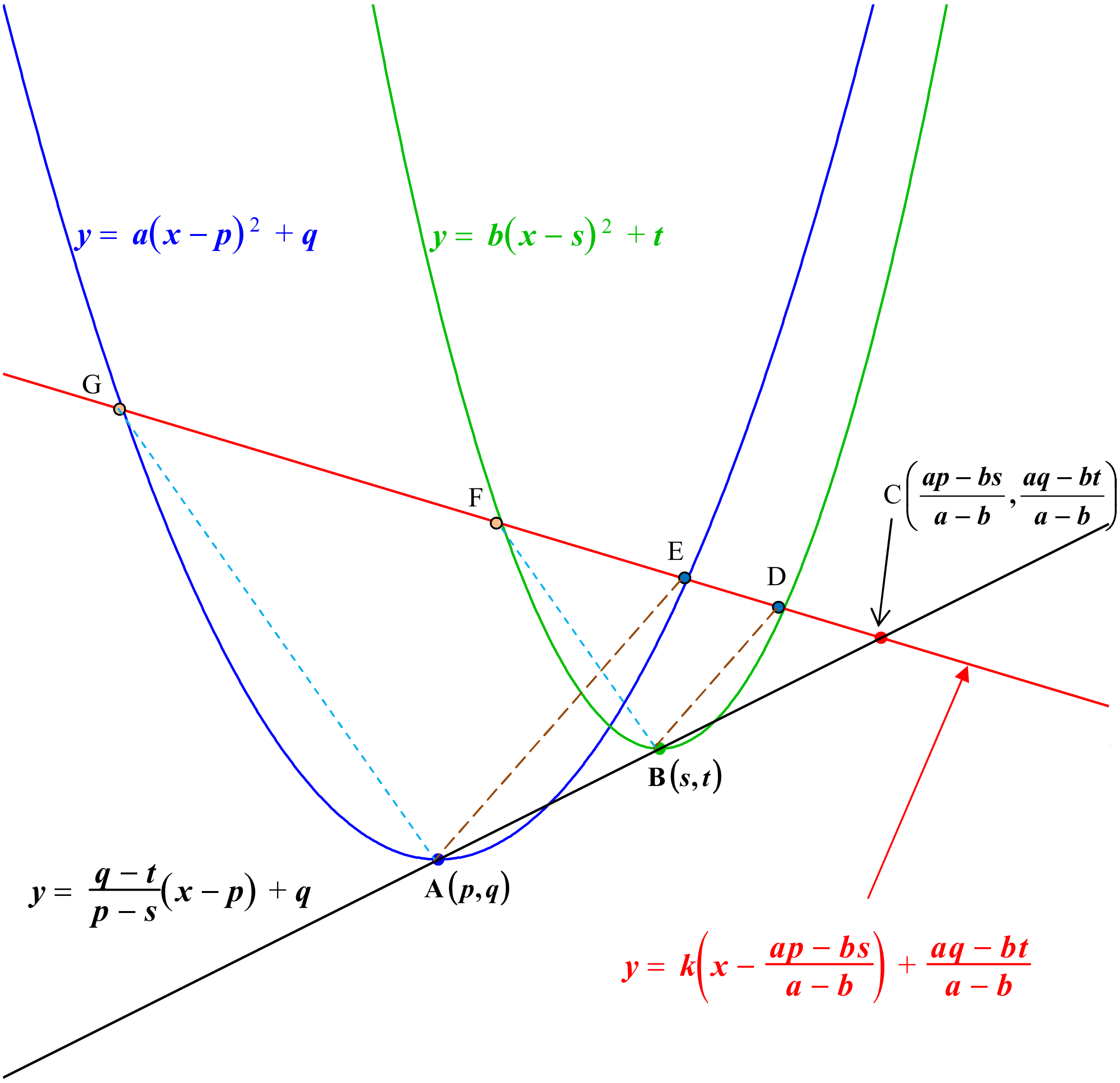
より， $2a\mathrm{X}=2b\mathrm{X}'$

$\therefore \dfrac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\dfrac{a}{b}\left(=\dfrac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right)$

このことから， $y=bx^2$ は， $y=ax^2$ を $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大したものであることがわかる。

よって， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}=b:a$

$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似中心の求め方



相似中心を C，$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の頂点をそれぞれ A，B とすると，
対応する点の接線の傾きは等しいから，
頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上に相似中心 C があり，
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似比が $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$，すなわち $b:a$ であることより，
$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=b:a$，すなわち相似中心 C は，線分 AB を $b:a$ に外分する点である。
よって，$\mathrm{C}\left(\frac{ap-bs}{a-b},\frac{aq-bt}{a-b}\right)$

相似中心を求めることでどんなことができるか？

ここで，相似中心 C を通る直線の傾きを k （k は実数）とすると，

直線の式は，$y = k\left(x - \dfrac{ap - bs}{a - b}\right) + \dfrac{aq - bt}{a - b}$

この直線と $y = a(x - p)^2 + q$， $y = b(x - s)^2 + t$ との交点をそれぞれ E，D とすると，

C は相似中心だから，△ACE∽△BCD

対応する点の接線の傾きは等しいから，

点 E における接線と点 D における接線の傾きは等しい。

同様に，点 F における接線と点 G における接線の傾きは等しい。

まとめ

2 次関数の相似中心を通る任意の直線と 2 次関数との交点から，

複数の 2 次関数において，接線の傾きが互いに等しい点を簡単に知ることができる。

物理の放物運動の問題を解くとき，2 次関数の相似性を利用する解き方もある。