40. 衝突後動く台に乗る物体

(2)

(a)

摩擦力を考えなくてはならないのは，Q と台 R の接触面のみだから，
台 R を右向きに動かす外力は，Q から受ける右向きの動摩擦力だけである。
動摩擦力は作用と反作用の関係の力だから，
Q も同じ大きさの動摩擦力を台 R から左向きに受ける。
よって，それぞれが受ける力積が互いに打ち消し合い，
Q と台 R の間で運動量保存則が成り立つ。
Q が台 R に速度 v_0 に乗ってから時間 Δt 後に一体となり，その速度を V とすると，

$m\alpha = -\mu' mg$，$\alpha = \dfrac{v_0 - V}{\Delta t}$ より，

$$m \cdot \frac{V - v_0}{\Delta t} = -\mu' mg$$

$\therefore mV - mv_0 = -\mu' mg\Delta t$　・・・①

$M\beta = \mu' mg$，$\beta = \dfrac{V - 0}{\Delta t}$ より，

$$M \cdot \frac{V - 0}{\Delta t} = \mu' mg$$

$\therefore MV = \mu' mg\Delta t$　・・・②

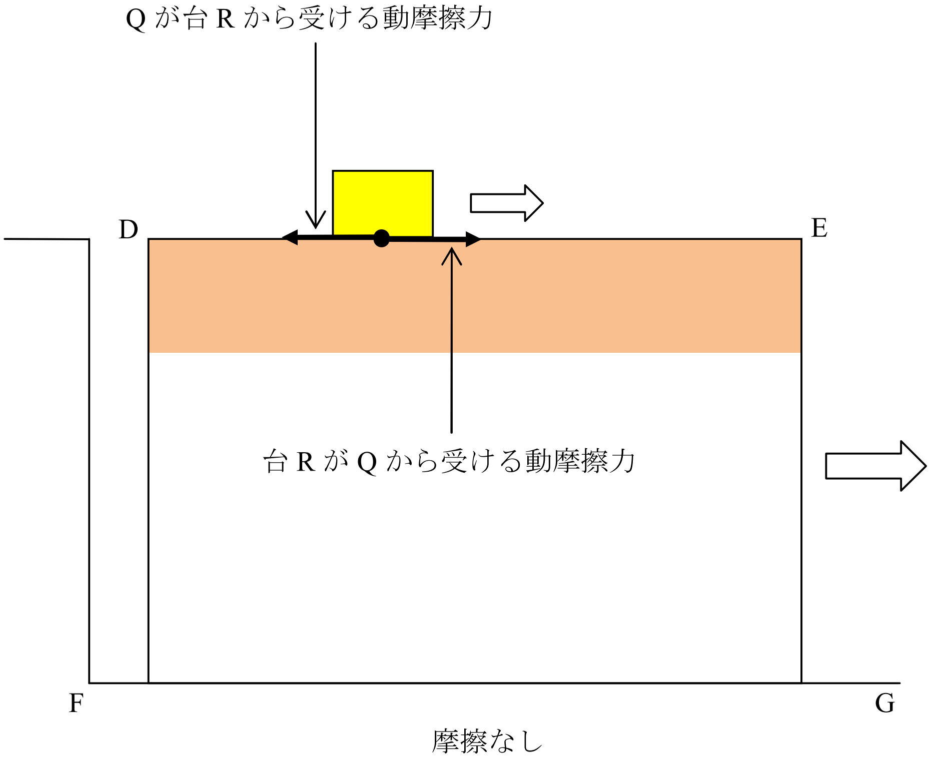
①＋②より，

$mV - mv_0 + MV = 0$

よって，

$mv_0 = mV + MV$ （運動量保存）

つまり，作用・反作用の法則は運動量保存則とは表裏一体である。



動摩擦力の向きについて

台 R は Q から動摩擦力を受けて右向きに進むから，Q から受ける動摩擦力は右向き。

よって，Q はその反作用の動摩擦力を台 R から左向きに受ける。

あるいは,

Q は台 R と等速になるまで速度が小さくなっていくから,

台 R から受ける動摩擦力は左向き。

よって，台 R はその反作用の動摩擦力を右向きに受ける。

(2)

(b)

別解：相対加速度，相対速度，相対変位の関係式で解く

台 R からみた Q の加速度を a_{RQ} とすると，

$$a_{\mathrm{RQ}} = \alpha - \beta = -\mu' g - \frac{\mu' m}{M} g = -\frac{\mu'(m+M)}{M} g$$

よって，

台 R からみた Q の速度を v_{RQ} とすると，初速度 $v_0 - 0 = v_0$ より，

$v_{\mathrm{RQ}} = v_0 - a_{\mathrm{RQ}} \cdot t$

台 R に対し Q が静止するときとは，$v_{\mathrm{RQ}} = 0$ となるときだから，

$v_{\mathrm{RQ}} = v_0 - a_{\mathrm{RQ}} \cdot t = 0$

よって，

$$t = \frac{v_0}{a_{\mathrm{RQ}}} = \frac{M v_0}{\mu'(m+M)g}$$

また，Q は台 R に対し右向きに d 変位するから，台 R から見た Q の変位は d である。

よって，

$$0 - {v_0}^2 = 2 a_{\mathrm{RQ}} d$$

$$d = -\frac{{v_0}^2}{2a_{\mathrm{RQ}}} = \frac{M {v_0}^2}{2\mu'(m+M)g}$$

相対加速度・相対初速度・相対速度・相対変位の関係

速度と変位の公式が使える。

同一直線上あるいは同一成分軸上において，

相対加速度を a_r，相対初速度を v_{r0}，相対速度を v_r，相対変位を Δx_r とすると、

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{r0} + \boldsymbol{a}_r \boldsymbol{t}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{v}_{r0} \boldsymbol{t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_r \boldsymbol{t}^2$$

$$\boldsymbol{v}_r^{\,2} - \boldsymbol{v}_{r0}^{\,2} = 2 \boldsymbol{a}_r \Delta \boldsymbol{x}_r$$

が成り立つ。

物体間の運動関係の扱い方

たとえば台車とその上の物体との運動関係のように，
物体間の相対運動が問題になるときは，
相対変位・相対速度・相対加速度を使って解くと楽。

相対変位

大地に対するAの変位を$\vec{s}_{\mathrm{OA}}$，Bの変位を$\vec{s}_{\mathrm{OB}}$とすると、
Aから見たBの相対変位$\vec{s}_{\mathrm{AB}}=\vec{s}_{\mathrm{OB}}-\vec{s}_{\mathrm{OA}}$

相対速度

大地に対するAの速度を$\vec{v}_{\mathrm{OA}}$，Bの速度を$\vec{v}_{\mathrm{OB}}$とすると，
Aから見たBの相対速度$\vec{v}_{\mathrm{AB}}=\vec{v}_{\mathrm{OB}}-\vec{v}_{\mathrm{OA}}$

相対加速度

大地に対するAの加速度を$\vec{a}_{\mathrm{OA}}$，Bの加速度を$\vec{a}_{\mathrm{OB}}$とすると、
Aから見たBの相対加速度$\vec{a}_{\mathrm{AB}}=\vec{a}_{\mathrm{OB}}-\vec{a}_{\mathrm{OA}}$
つまり，「AからみたB」や「Aに対するB」とは$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$のことである。

ベクトルの成分表示

ベクトルを成分表示すれば，各成分について和・差の計算することで，
相対ベクトルを成分表示することができる。
とくに，AとBが同一直線上を運動しているのであれば，直線上に正負の向きをとり，
それぞれのベクトルの大きさに運動の向きの正負の符号をつけるだけですむ。

AとBが同一直線上を運動していない場合の成分表示

ベクトルをx成分とy成分に分解し，それぞれについて成分表示する。
たとえば，速度ベクトル$\vec{v}_{\mathrm{OA}}$のx,y成分を$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{A}x} \\ v_{\mathrm{A}y} \end{pmatrix}$、$\vec{v}_{\mathrm{OB}}$の$x,y$成分を$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{B}x} \\ v_{\mathrm{B}y} \end{pmatrix}$とし，
Aから見たBの相対速度ベクトル$\vec{v}_{\mathrm{AB}}$を成分表示すると，

$\vec{v}_{\mathrm{AB}}=\vec{v}_{\mathrm{OB}}-\vec{v}_{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} v_{\mathrm{B}x} \\ v_{\mathrm{B}y} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_{\mathrm{A}x} \\ v_{\mathrm{A}y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{\mathrm{B}x}-v_{\mathrm{A}x} \\ v_{\mathrm{B}y}-v_{\mathrm{A}y} \end{pmatrix}$となる。

またその大きさは

$$\left|\vec{v}_{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{\left(v_{\mathrm{B}x}-v_{\mathrm{A}x}\right)^2+\left(v_{\mathrm{B}y}-v_{\mathrm{A}y}\right)^2}$$

座標平面に図示して考えるとわかりやすい。