

48. ケプラーの法則

万有引力の位置エネルギー

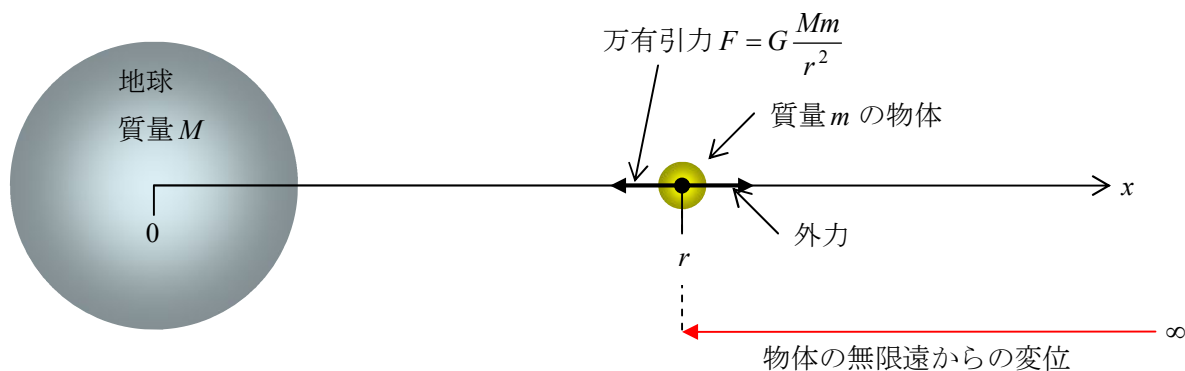
位置エネルギーの基準となる位置は任意で構わないが、
 万有引力の場合は、通常、無限遠を位置エネルギーの基準位置とする。
 位置エネルギーは保存力がする仕事に使われるから、
 保存力（万有引力）のする仕事が W のとき、位置エネルギー変化は $-W$ である。
 あるいは、保存力とつり合う外力がする仕事が W のとき、
 この仕事は、位置エネルギーとして蓄えられるから、位置エネルギー変化は W である。
 では、地球からの距離が r の位置における万有引力の位置エネルギーを、
 万有引力とつり合う外力がする仕事から求めてみよう。
 質量 m の物体を無限遠から地球からの距離が r の位置まで万有引力とつり合いの外力で
 移動させるとき、その外力がする微小の仕事は、

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = |\vec{F}| |d\vec{x}| \cos 180^\circ = -|\vec{F}| |d\vec{x}| < 0 \text{ だから、位置エネルギーは負となる。}$$

よって、外力がする仕事の大きさを求めてから、符号を負にすればよい。

$$\int_r^\infty dW = \int_r^\infty \frac{GMm}{x^2} dx = \left[-\frac{Gm}{x} \right]_r^\infty = \frac{GMm}{r} \text{ より、}$$

地球からの距離が r の位置における万有引力の位置エネルギーは、 $-\frac{GMm}{r}$ である。



よって、万有引力場では、少なくとも、

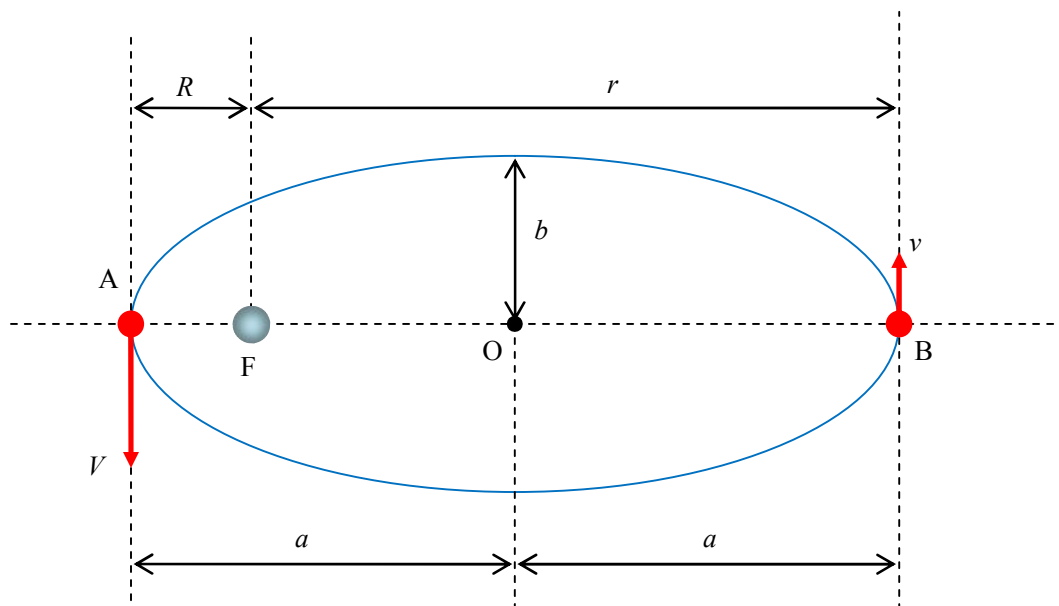
$$\frac{1}{2} mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r} \right) = \text{一定}$$

が成り立つ。

ケプラーの第3法則

同一質点のまわりを回るすべての天体は、その軌道に関係なく、 $\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$ である。

証明



質量 M の質点 F のまわりを楕円軌道している質量 m の質点で考える。

質点 F は楕円軌道の焦点でもある。

また、質量 m の質点が A にあるときの速さを V 、B にあるときの速さを v とする。

ケプラーの第2法則（面積速度一定の法則）より、

$$\frac{1}{2}VR = \frac{1}{2}vr$$

$$\therefore v = \frac{R}{r}V \quad \dots \textcircled{1}$$

力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mV^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$\therefore V^2 - \frac{2GM}{R} = v^2 - \frac{2GM}{r} \quad \dots \textcircled{2}$$

①を②に代入すると、

$$V^2 - \frac{2GM}{R} = \frac{R^2}{r^2}V^2 - \frac{2GM}{r}$$

$$V^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$V^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right) \left(1 + \frac{R}{r} \right) = \frac{2GM}{R} \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

$$V^2 \left(1 + \frac{R}{r} \right) = \frac{2GM}{R}$$

$$V^2 = \frac{2GMr}{R(R+r)}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

よって,

面積速度を h とすると, $h = \frac{1}{2}VR$ より,

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM R r}{R+r}} \quad \dots \textcircled{3}$$

一方, 楕円の性質から,

$$\text{楕円の長軸半径 } a = \frac{R+r}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{離心率 } e = \frac{OF}{OA} = \frac{OA - AF}{OA} = 1 - \frac{R}{a} \quad \dots \textcircled{5}$$

④, ⑤より,

$$e = 1 - \frac{R}{\frac{R+r}{2}} = 1 - \frac{2R}{R+r} = \frac{-R+r}{R+r} \quad \dots \textcircled{6}$$

楕円の短軸半径 $b = \sqrt{OA^2 - OF^2}$, $e = \frac{OF}{OA}$ より,

$$b = \sqrt{OA^2 - e^2 OA^2} = a \sqrt{1 - e^2}$$

これと④, ⑥より,

$$b = \frac{R+r}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{-R+r}{R+r} \right)^2} = \frac{R+r}{2} \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2}}$$

$$\therefore b = \sqrt{Rr} \quad \dots \textcircled{7}$$

③に④, ⑦を代入すると,

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GMRr}{R+r}} = \frac{\sqrt{Rr}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2GM}{R+r}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

ここで,

面積速度 $h \times$ 周期 $T =$ 楕円の面積 πab より,

$$T = \frac{\pi ab}{h} = \pi ab \cdot \frac{2}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \sqrt{a^3}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$$

$\frac{4\pi^2}{GM}$ は定数だから,

同一質点のまわりを回るすべての天体は, その軌道に関係なく,

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$$

である。

ケプラーの第3法則の簡単な導き方

楕円軌道であるので, 正しくは上のように導かなければならないが,

ケプラーの第3法則は円軌道でも成り立つことがわかっている。

面積速度が一定だから, 円軌道の天体は等速円運動をする。

引力と遠心力のつり合いあるいは天体の運動方程式より,

$$\frac{GMm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}$$

$$\therefore a = \frac{GM}{v^2} \quad \dots \textcircled{8}$$

周期と速さの関係より

$$T = \frac{2\pi a}{v}$$

$$\therefore v = \frac{2\pi a}{T} \quad \dots \textcircled{9}$$

⑧, ⑨より,

$$a = \frac{GM}{v^2} = \frac{GM}{\frac{4\pi^2 a^2}{T^2}} = \frac{GMT^2}{4\pi^2 a^2}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$$