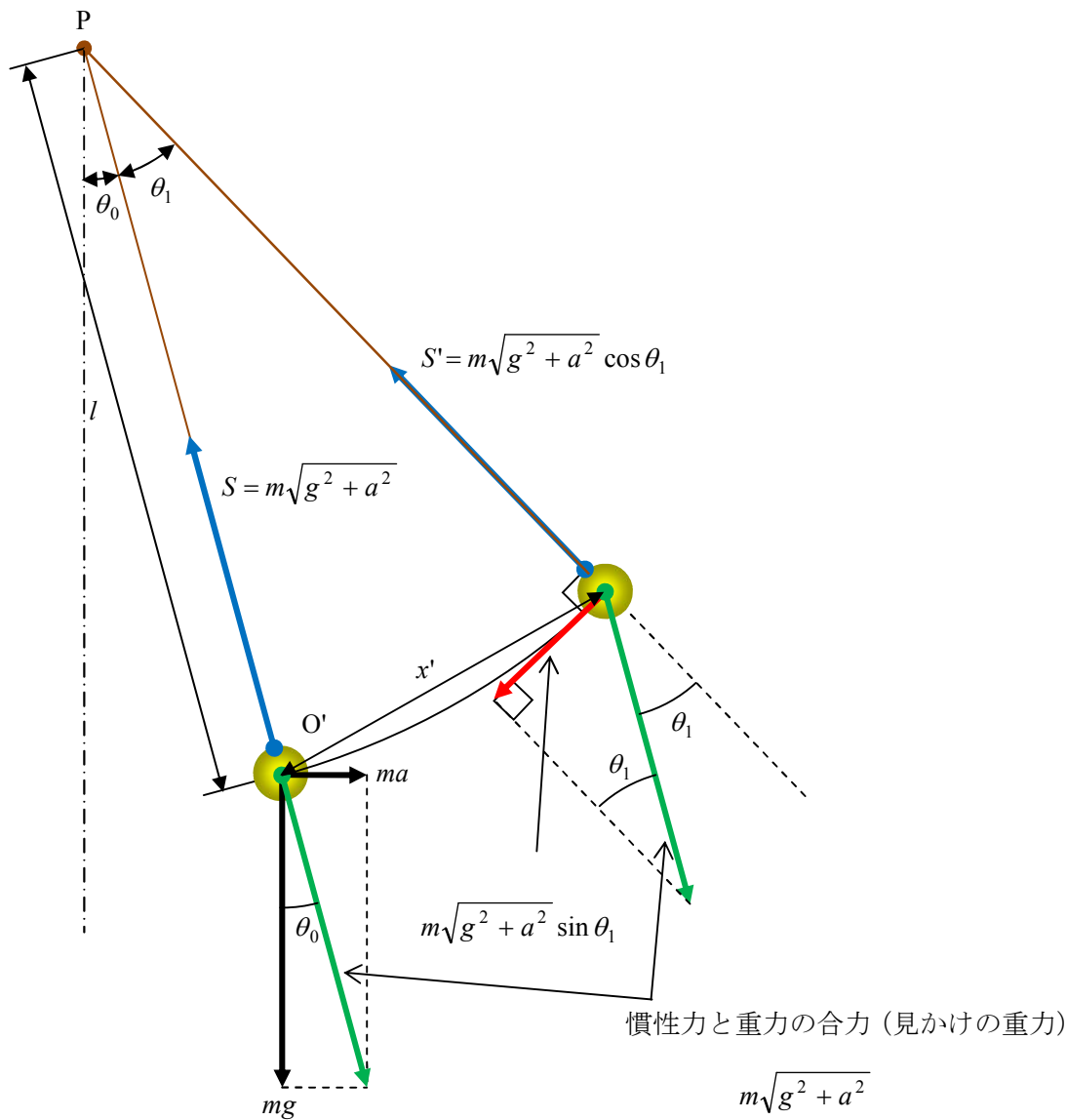


54. 単振り子

5



張力 $S' = m\sqrt{g^2 + a^2} \cos \theta_1$ は、単振動の軌道と常に垂直なので、復元力ではない。

復元力は、慣性力と重力の合力の単振動の軌道成分 $m\sqrt{g^2 + a^2} \sin \theta_1$ である。

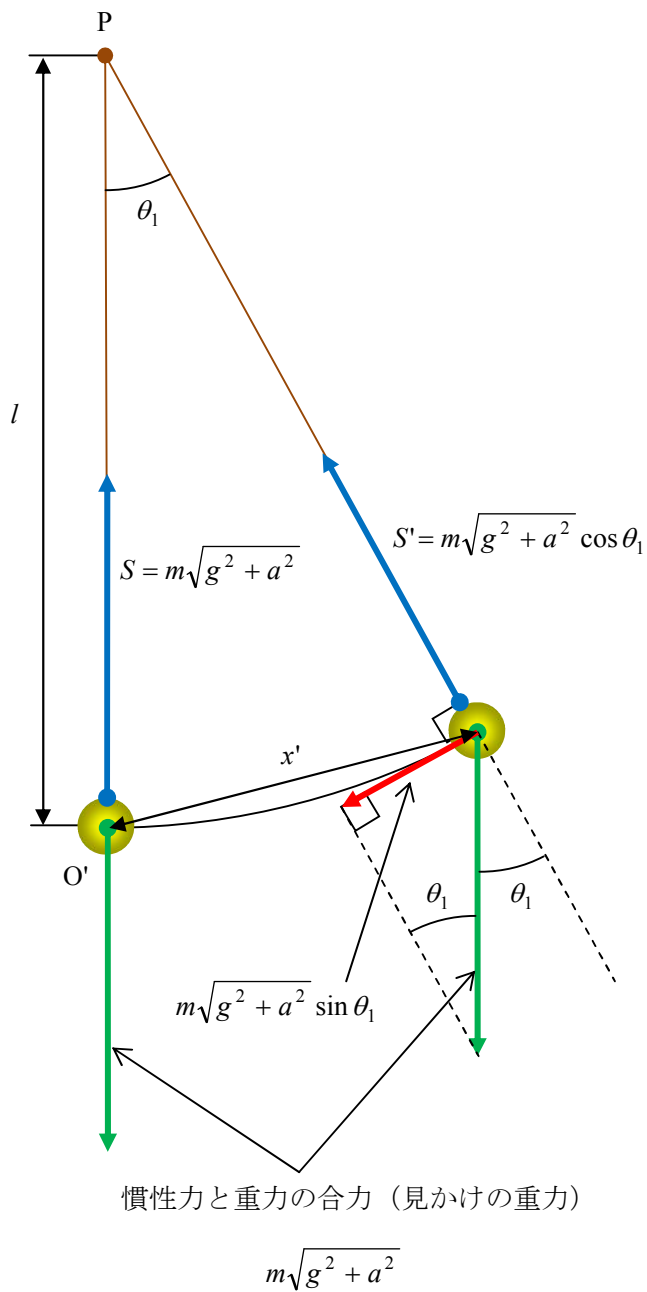
ここで、小球 Q を小さく振動させたところから、 θ_1 は十分小さいと見なしてよい。

さらに、 θ_1 は十分小さいと $\sin \theta_1 = \frac{x'}{l}$ としてよいので、

$$\text{復元力の大きさは、 } m\sqrt{g^2 + a^2} \sin \theta_1 = \frac{m\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \cdot x' \quad \dots \text{ (答)}$$

補足

P を軸に時計回りに θ_0 回転させ、O' が P の真下になるようにするとわかりやすい。



7 8

図のように固定した xy 軸をとる。

糸が切れた瞬間、小球 Q は糸の束縛力から解放され、重力 g だけを受ける。

よって、Q の加速度を xy 成分で表示すると $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

一方、床の加速度の xy 成分は $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって、床から見た小球 Q の加速度の xy 成分は $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -g \end{pmatrix}$ である。

糸を切ってから床上に落ちるまでの時間

床から見た小球 Q の変位の y 成分は $-h$ だから、求める時間を t とすると、

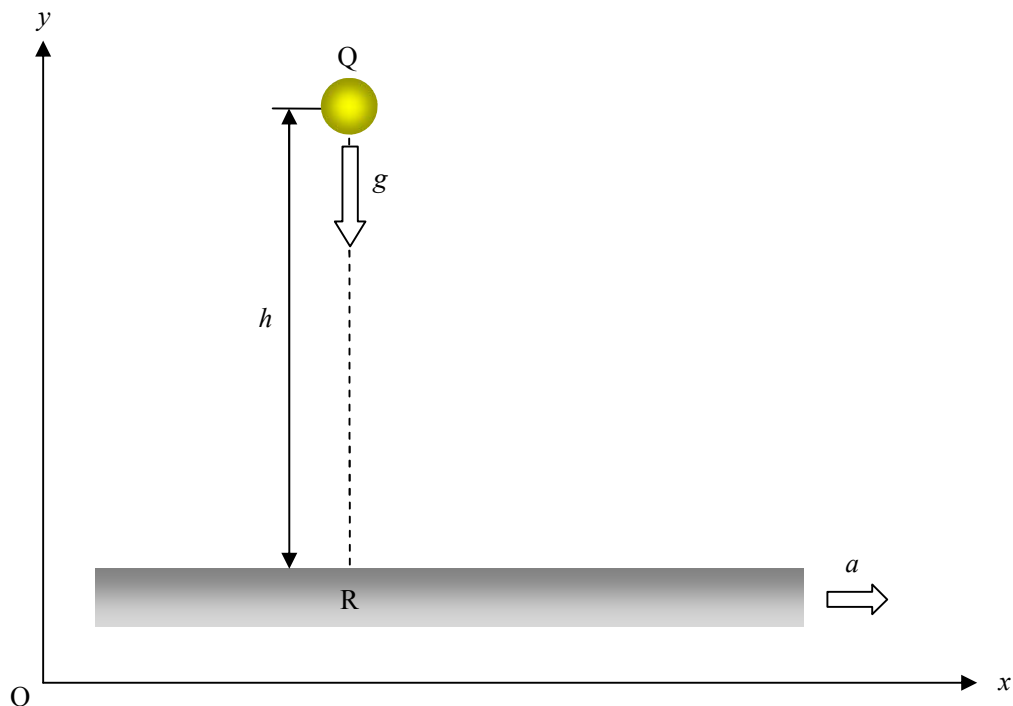
$$-h = \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \dots \text{(答 7)}$$

落下地点

床から見た小球 Q の加速度の x 成分は $-a$ だから、

$$\text{床から見た小球 Q の変位の } x \text{ 成分 } \Delta x = \frac{1}{2} \cdot (-a) \cdot t^2 = -\frac{1}{2} a \cdot \frac{2h}{g} = -\frac{ah}{g}$$

よって、R から負の方向に $\frac{ah}{g}$ 離れた床上に落ちた。 $\dots \text{(答 8)}$



単振り子の運動方程式と単振動の式

まずは、用語の定義から

単振り子

軽い糸の上端を固定して下端におもりをつるし、これを鉛直面内で振動させるもの
振り子

定点のまわりに振動する物体

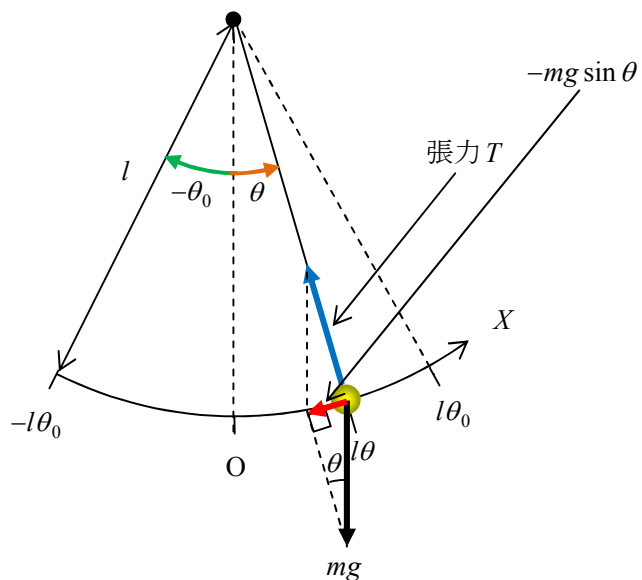
では、本題

質量 m の振り子に働く外力のつり合いの位置を原点 O とし、

振り子の軌道（円弧）の反時計まわりの向きを X 軸とする。

また、振り子の振幅の大きさを $l\theta_0$ とし、 θ_0 は十分小さいものとする ($\theta_0 \approx 0$)。

ただし、図は、見やすくするため θ_0 をわざと大きくとった。



振り子の運動方程式

振り子は軌道（円弧）の接線方向の外力を受けて単振動をする。

糸の張力 T の円弧の接線方向の分力は 0 だから、

張力 T は振り子の運動方程式に含まれない。

よって、振り子の単振動運動の原動力となる外力は、

重力の円弧の接線成分 $-mg \sin \theta$ である。

よって、振り子の単振動の運動方程式は、

$$ma = -mg \sin \theta$$

ここで、 $|\theta| < \theta_0 \approx 0$ だから、 $\sin \theta = \theta$ としてよい。

$$\text{よって、 } ma = -mg\theta \quad \dots \text{④}$$

$$\text{また、振り子の変位 } X = l\theta \quad \dots \text{⑤}$$

$$\text{④、⑤より、 } ma = -mg \cdot \frac{X}{l} \quad \dots \text{⑥}$$

$$\therefore ma = -\frac{mg}{l} X$$

$\frac{mg}{l}$ は定数だから、運動方程式⑥は単振動を表している。

単振動の式

振り子の振幅の大きさは $l\theta_0$ であり、初期位相を α 、角振動数を $\omega (> 0)$ とすると、

$$X = l\theta_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{振り子の速度 } v = \frac{dX}{dt} = l\theta_0 \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{振り子の加速度 } a = \frac{dv}{dt} = -l\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X \quad \dots \text{⑦}$$

単振動の式と単振動の運動方程式との融合

$$\text{⑥より、 } a = -\frac{g}{l} X \quad \text{これと⑦より、}$$

$$-\omega^2 X = -\frac{g}{l} X \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

以上より、単振り子は振幅 $l\theta_0$ 、周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ の単振動運動を行う。

補足

⑥について、単振動の運動方程式の一般形 $ma = -KX$ より、 $K = \frac{mg}{l}$

これを公式 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$ に代入すると、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ が得られる。