

56. 惑星のトンネル

(4)

$-R \leq x \leq R$ において、物体 A に働く外力 $f = -\frac{4}{3}\pi\rho Gmx$ だから、

$x < 0$ のとき $f > 0$ 、つまり物体 A に働く外力は $x=0$ の向き、 $x=0$ のとき $f=0$ 、

$x > 0$ のとき $f < 0$ 、つまり物体 A に働く外力は $x=0$ の向きとなり、

物体 A は常に $x=0$ の向きに、 x の大きさに比例した大きさの外力を受けるため、単振動運動をする。

(5)

物体 A の加速度を a とすると、その運動方程式は、

$$ma = -\frac{4}{3}\pi\rho Gmx$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると、

$$K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm, \quad X = x \text{ だから、}$$

物体 A は振動中心が $x=0$ 、周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\rho Gm}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ の単振動運動を行う。

$$\text{よって、} t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$$

また、単振動運動の力学的エネルギーは保存されるから、

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

よって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho Gm \cdot R^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\therefore v_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}} \quad \dots \text{(答)}$$

または、

$$\text{振動中心の速さ } v_1 = R\omega = R \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\pi R\sqrt{\frac{\rho G}{3\pi}} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}} \quad \dots \text{(答)}$$

(6)

$-R \leq x \leq R$ では、単振動運動の力学的エネルギーが保存されるから、
物体が惑星 Q の表面に達したときの速さを v_3 とすると、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 \quad \left(K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$R \leq x$ では、万有引力の力学的エネルギーが保存されるから、

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + \left(-\frac{GMm}{R} \right) = 0 + \left(-\frac{GMm}{3R} \right) \quad \left(M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{2GMm}{3R} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{2GMm}{3R}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{KR^2}{m} + \frac{4GM}{3R}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi\rho Gm \cdot R^2}{m} + \frac{4G \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3}{3R}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\rho GR^2}{3} + \frac{16\pi\rho GR^2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{28\pi\rho GR^2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{4R^2}{9} \cdot 7\pi\rho G} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} v_2 = \frac{2R}{3} \sqrt{7\pi\rho G} \quad \dots \text{(答)}$$