57. ばねに連結された 2 物体（京大頻出型）

ばねに連結された 2 物体の相対運動方程式と換算質量

(2)

ばねの弾性力を f とすると，

A の運動方程式は，$m_A a_A = f$ ・・・①

B の運動方程式は，$m_B a_B = -f$ ・・・②

①＋②より，

$m_A a_A + m_B a_B = 0$

$\therefore m_A a_A t + m_B a_B t = 0$

$\therefore m_A v_A + m_B v_B = 0$ ・・・③

力学的エネルギーが保存されるから，

$$\frac{1}{2}k(L-l)^2 = \frac{1}{2}m_A {v_A}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_B}^2$$

$\therefore m_B k(L-l)^2 = m_A m_B {v_A}^2 + {m_B}^2 {v_B}^2$ ・・・④

③より，${m_B}^2 {v_B}^2 = {m_A}^2 {v_A}^2$ だから，これを④に代入して，

$$\begin{aligned} m_B k(L-l)^2 &= m_A m_B {v_A}^2 + {m_A}^2 {v_A}^2 \\ &= m_A (m_A + m_B) {v_A}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore v_A = (L-l)\sqrt{\frac{k m_B}{m_A (m_A + m_B)}} \qquad (\because v_A > 0)$$

これと③より，

$$v_B = -(L-l)\sqrt{\frac{k m_A}{m_B (m_A + m_B)}}$$

(3)

重心の公式より，$x_G = \dfrac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$

(4)

A の運動方程式は，$m_A a_A = kX$ ・・・⑤

B の運動方程式は，$m_B a_B = -kX$ ・・・⑥

(5)

⑤より $a_{\mathrm{A}}=\dfrac{k}{m_{\mathrm{A}}}X$，⑥より $a_{\mathrm{B}}=-\dfrac{k}{m_{\mathrm{B}}}X$

$\therefore a=a_{\mathrm{B}}-a_{\mathrm{A}}=-\dfrac{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}\cdot kX$

$\therefore \dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}a=-kX$

よって，$M=\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$

単振動の運動方程式 $Ma=-kX$ より，

周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\sqrt{\dfrac{k}{M}}=\sqrt{\dfrac{k}{\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}}}=\sqrt{\dfrac{k(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})}{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}}$

（ω のきちんとした求め方は物理小ネタ「単振動・単振動の力学的エネルギー保存則」参照）

(6)

$M=\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$ を換算質量という。

$Ma=-kX$ は，物体 A から見た物体 B の単振動の運動方程式を表している。

つまり，加速度 a は物体 A から見た物体 B の加速度，

また，この運動方程式の X は物体 A から見た物体 B のつり合いの位置（自然長）からの変位 $X=x_{\mathrm{B}}-(x_{\mathrm{A}}+l)$ を意味している。

換算質量 $M=\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$ は物体 A が観測する物体 B の質量である。

したがって，物体 A から見た物体 B の単振動運動ととらえ，X を求めればよい。

物体 A から見た物体 B の単振動運動の振幅

物体 B が単振動開始した位置は，物体 A から見て $(x_{\mathrm{A}}+L)-x_{\mathrm{A}}=L$ の位置，

振動中心は，すなわちつり合いの位置は物体 A から見て $(x_{\mathrm{A}}+l)-x_{\mathrm{A}}=l$ の位置である。

よって，物体 A から見た物体 B の振幅は $L-l$

振幅は直感的にすぐ $L-l$ と出るが，あえて細かく相対的位置関係から求めた。

物体 A から見た物体 B の単振動運動の式

初期位相をαとすると，

$X=(L-l)\sin(\omega t+\alpha)$，物体 A から見た物体 B の速度 $v=\dfrac{dX}{dt}=(L-l)\omega\cos(\omega t+\alpha)$

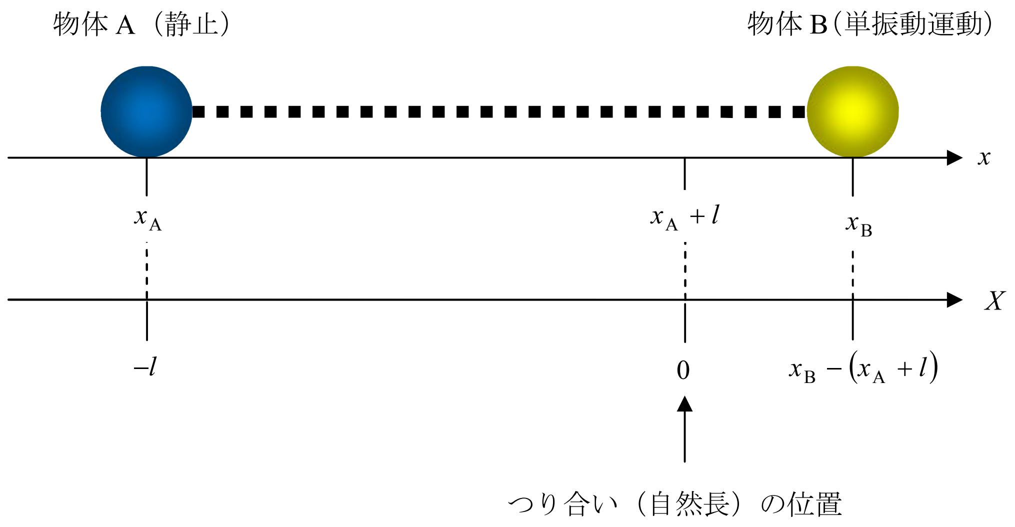
条件より，$t=0$ のとき，$X=0$，$v=-(L-l)\omega$ だから，

$0=(L-l)\sin\alpha$，$-(L-l)\omega=(L-l)\omega\cos\alpha$ $\quad\therefore\alpha=\pi$

よって，物体 A から見た物体 B の単振動の式は，

$X=(L-l)\sin(\omega t+\pi)$

$\therefore X=-(L-l)\sin\omega t$ ・・・(答)



$X=x_B-x_A-l$ より，$x_B=X+x_A+l$ ・・・⑦

$x_G=\dfrac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B}$ より，

$(m_A+m_B)x_G=m_Ax_A+m_Bx_B$ ・・・⑧

⑦，⑧より，

$(m_A+m_B)x_G=m_Ax_A+m_B(X+x_A+l)$

$(m_A+m_B)x_A=(m_A+m_B)x_G-m_BX-m_Bl$

$x_A=x_G-\dfrac{m_B}{m_A+m_B}l-\dfrac{m_B}{m_A+m_B}X$

$X=-(L-l)\sin\omega t$ を代入して，

$x_A=x_G-\dfrac{m_B}{m_A+m_B}l+\dfrac{m_B}{m_A+m_B}(L-l)\sin\omega t$ ・・・(答)

換算質量と作用反作用または内力による 2 物体の運動

ばねに連結された質量 $m_{\rm A}$ の質点 A と質量 $m_{\rm B}$ 質点 B が単振動運動しているとき，

地上の観測者が，弾性力の大きさを $|f|$，それぞれの加速度を $a_{\rm A}$， $a_{\rm B}$ として，

それぞれの運動方程式を立てると，

$m_{\rm A}a_{\rm A}=f \Leftrightarrow m_{\rm B}a_{\rm B}=-f$

である。

よって， $a_{\rm A}=\dfrac{f}{m_{\rm A}}$， $a_{\rm B}=-\dfrac{f}{m_{\rm B}}$ となる。

では，質点 A から見た質点 B の運動方程式はどうなるかというと，

質点 A から見た質点 B の加速度は，

$$a_{\rm B}-a_{\rm A}=-\frac{f}{m_{\rm B}}-\frac{f}{m_{\rm A}}=-\frac{m_{\rm A}+m_{\rm B}}{m_{\rm A}m_{\rm B}}f$$

質点 A から見ても質点 B が外力 $-f$ を受けていることに変りないから，

質点 A から見た質点 B の運動方程式は，

$$\frac{m_{\rm A}m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}(a_{\rm B}-a_{\rm A})=-f$$

となる。

つまり，質点 A から質点 B を見ると，

質量 $\dfrac{m_{\rm A}m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}$ の質点が外力 $-f$ を受けて加速度 $a_{\rm B}-a_{\rm A}$ の単振動運動している。

逆に，質点 B から質点 A を見ると，

$a_{\rm A}-a_{\rm B}=\dfrac{f}{m_{\rm A}}+\dfrac{f}{m_{\rm B}}=\dfrac{m_{\rm A}+m_{\rm B}}{m_{\rm A}m_{\rm B}}f$ より，

質点 B から見た質点 A の運動方程式は，

$$\frac{m_{\rm A}m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}(a_{\rm A}-a_{\rm B})=f$$

つまり，質点 B から質点 A を見ると，

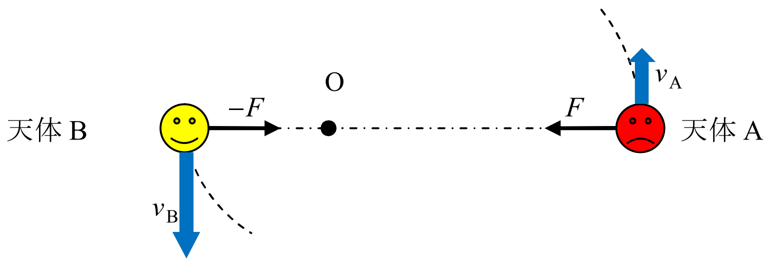
質量 $\dfrac{m_{\rm A}m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}$ の質点が外力 f を受けて加速度 $a_{\rm A}-a_{\rm B}$ で単振動運動している。

このように，2 物体が作用反作用の関係の外力または内力によって運動しているとき，

相対運動の運動方程式を立てると現れる $\dfrac{m_{\rm A}m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}$ のような質量を換算質量という。

例

万有引力で互いのまわりを回る **2** つの天体の運動



質量 m_A の天体 A と質量 m_B の天体 B が，
重心 O を中心に互いのまわりを等速円運動しているものとする。
向心力は万有引力であり，天体 A と天体 B の作用反作用の力であるから，
天体 A が天体 B から受ける万有引力を F とすると，
天体 B が天体 A から受ける万有引力は $-F$ である。
天体 A，B の向心加速度をそれぞれ a_A， a_B とすると，
天体 A の運動方程式は， $m_A a_A = F$
天体 B の運動方程式は， $m_B a_B = -F$
となる。
よって，

$$a_A = \frac{F}{m_A} \quad ・・・①$$

$$a_B = -\frac{F}{m_B} \quad ・・・②$$

天体 B から見た天体 A の加速度は，
①－②より，

$$a_A - a_B = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} F$$

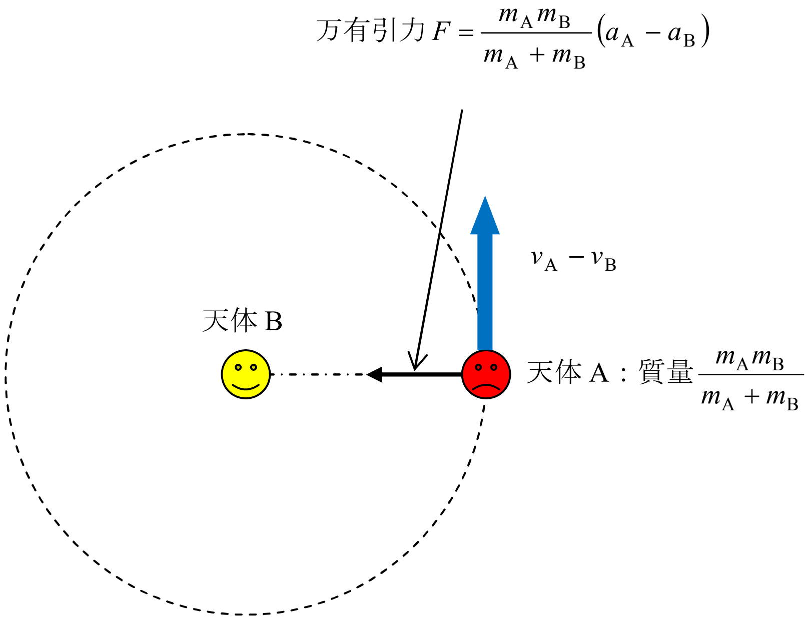
天体 B から見ても天体 A に働く外力は万有引力 F だから，
天体 B から見た天体 A の運動方程式は，

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(a_A - a_B) = F$$ となる。

よって，

天体 B から見ると，質量 $\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の天体 A が，天体 B からの万有引力 F を受けて，
天体 B のまわりを向心加速度 $a_A - a_B$ で等速円運動していることになる。

天体 B から見た天体 A の運動



補足

京大の力学は,

重心の運動・重心から見た運動を含めた相対運動・相対運動と換算質量が頻出

重心対策は京大の物理 25 カ年か「四訂前田の物理」上巻の重心の運動をテーマにした項「質量中心の運動」がいいでしょう。

尚,「四訂前田の物理」(前田和貞著・代々木ライブラリー)は絶版なので,

アマゾン等で入手してください。