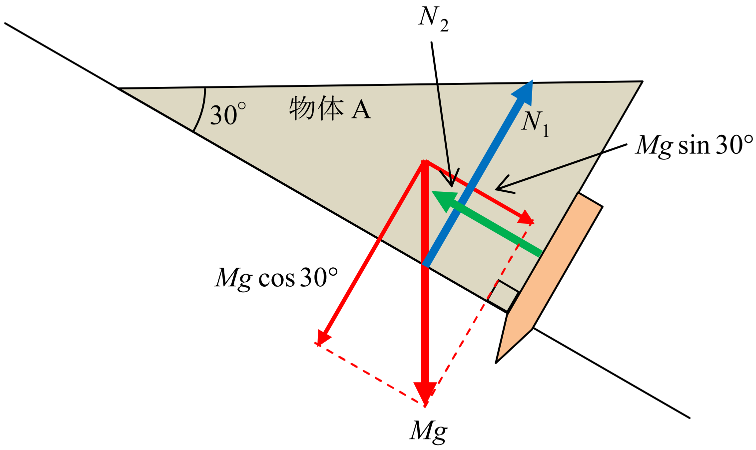
58. 斜面での単振動

(1)

(a)



物体 A に働く力のつり合いより，

$N_1 = Mg\cos 30°$

$N_2 = Mg\sin 30°$

$\therefore N_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg$， $N_2 = \dfrac{1}{2}Mg$ ・・・(答)

(b)

衝突直前の速さを v とすると，衝突直後の速さは ev

衝突前と衝突後のそれぞれについての力学的エネルギー保存則より，

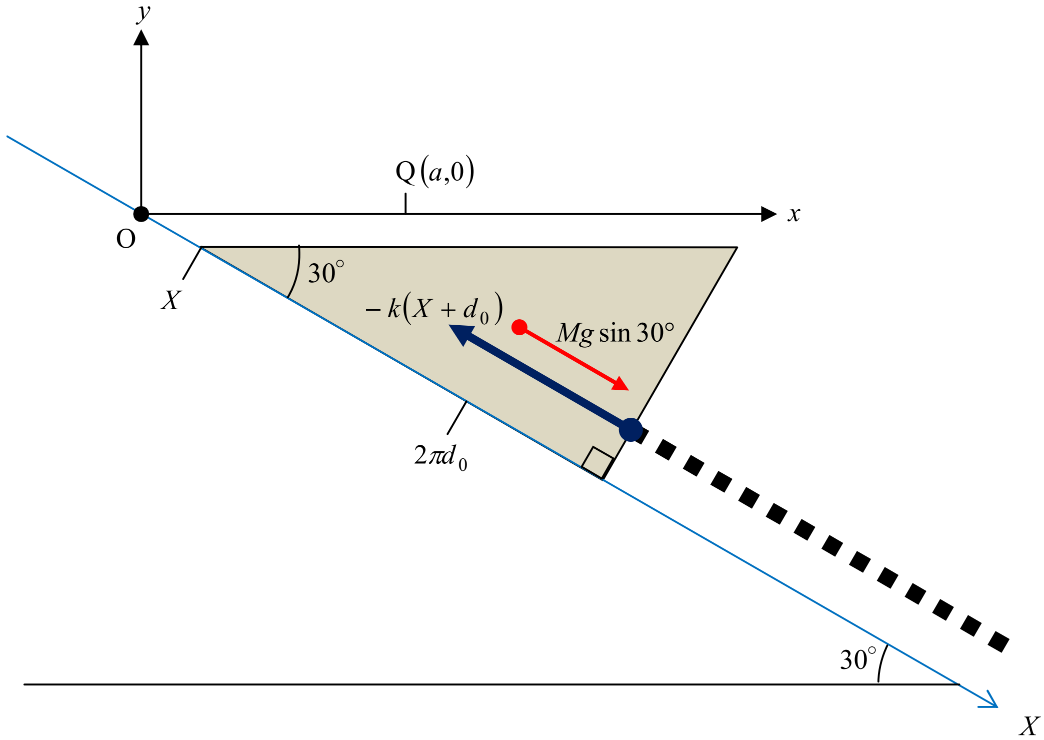
$\dfrac{1}{2}mv^2 = mgh$ ・・・①

$\dfrac{1}{2}m(ev)^2 = mgh'$ ・・・②

$\dfrac{②}{①}$ より， $e^2 = \dfrac{h'}{h}$ $\therefore e = \sqrt{\dfrac{h'}{h}}$ ・・・(答)

(2)

(a)



d_0 について

斜面に平行な方向の力のつり合いより， $kd_0 = Mg\sin 30°$ $\therefore d_0 = \dfrac{Mg}{2k}$ ・・・(答)

周期 T について

O を原点とし， X 軸を斜面下向きにとると，ばねの自然長からの変位は $d_0 + X > 0$，

また，弾性力の向きは斜面上向き，すなわち負

よって，物体 A が受ける弾性力＝$-k(d_0+X)$

したがって，物体 A の斜面方向の加速度を a とすると，

物体 A の斜面に平行な方向の運動方程式は，

$$Ma = -k(X+d_0) + Mg\sin 30°$$
$$= -k\left(X + d_0 - \frac{Mg}{2k}\right)$$

これと $d_0 = \dfrac{Mg}{2k}$ より， $Ma = -kX$

よって， $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ ・・・(答)

(b)

$h_0 = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{T}{4}\right)^2$， $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ より， $h_0 = \dfrac{\pi^2 Mg}{8k}$ ・・・(答)

補足

$Ma=-kX$，$a=\dfrac{d^2X}{dt^2}$ より，$\dfrac{d^2X}{dt^2}=-\dfrac{k}{M}X$　・・・③

微分方程式①を解くと，

特殊解 $X=A\sin(\omega t+\alpha)$（A は振幅，α は初期位相）

が得られる。

$A=2\pi d_0$，$t=0$ のとき $X=2\pi d_0$ より，$2\pi d_0=2\pi d_0\sin\alpha$　$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{2}$

よって，

$X=2\pi d_0\cos\omega t$

$$v=\frac{dX}{dt}=-2\pi d_0\sin\omega t$$

$$a=\frac{d^2X}{dt^2}=-2\pi d_0\omega^2\cos\omega t=-\omega^2X$$

$$\therefore \frac{d^2X}{dt^2}=-\omega^2X \quad ・・・④$$

③，④より，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

これと $\omega T=2\pi$ より，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

補足の補足

単振動の運動方程式の解法

単振動の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-Kx$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-Kx$ の両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかけると，$m\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}=-Kx\dfrac{dx}{dt}$

ここで，

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=\dfrac{dv^2}{dt}=\dfrac{dv^2}{dv}\dfrac{dv}{dt}=2v\dfrac{dv}{dt}=2\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dx^2}{dt}=\dfrac{dx^2}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}$ より，

$\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$，$x\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{dx^2}{dt}$

$$\therefore m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-K\frac{dx^2}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{K}{m}\frac{dx^2}{dt}$$

これを t について不定積分すると，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=-\dfrac{K}{m}x^2+c_1$ （c_1 は積分定数）

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{c_1-\frac{K}{m}x^2}$$

±いずれも同じ結果になるので，$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{c_1-\dfrac{K}{m}x^2}$ で進めると，$\dfrac{dx}{\sqrt{c_1-\dfrac{K}{m}x^2}}=dt$ より，

$$\frac{dx}{\sqrt{c_1}\sqrt{1-\frac{K}{mc_1}x^2}}=dt \qquad \therefore \int\frac{dx}{\sqrt{c_1}\sqrt{1-\frac{K}{mc_1}x^2}}=\int dt$$

ここで，左辺の不定積分について，

$\sqrt{\dfrac{K}{mc_1}}x=\sin\theta$ とおくと，$\sqrt{\dfrac{K}{mc_1}}dx=\cos\theta d\theta$ $\quad\therefore dx=\sqrt{\dfrac{mc_1}{K}}\cos\theta d\theta$

$$\therefore \int\frac{dx}{\sqrt{c_1}\sqrt{1-\frac{K}{mc_1}x^2}}=\int\sqrt{\frac{mc_1}{K}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{c_1}\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{m}{K}}\theta$$

よって，$\sqrt{\dfrac{m}{K}}\theta=t+c_2$ （c_2 は積分定数）

$$\therefore \theta=\sqrt{\frac{K}{m}}t+c_3 \qquad \left(c_3=\sqrt{\frac{K}{m}}c_2\right)$$

$$\therefore \sin\theta=\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t+c_3\right)$$

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{K}{mc_1}}x$ とおいたから，$\sqrt{\dfrac{K}{mc_1}}x=\sin\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+c_3\right)$

$$\therefore x=\sqrt{\frac{mc_1}{K}}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t+c_3\right)$$

ここで，$A=\sqrt{\dfrac{mc_1}{K}}$，$\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ とおくと，

単振動の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-Kx$ の解は，

$x=A\sin(\omega t+c_2)$

あるいは，

$x=A\sin(\omega t+c_2)=(A\cos c_2)\sin\omega t+(A\sin c_2)\cos\omega t$ より，

$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t \qquad (a=A\cos c_2, b=A\sin c_2)$

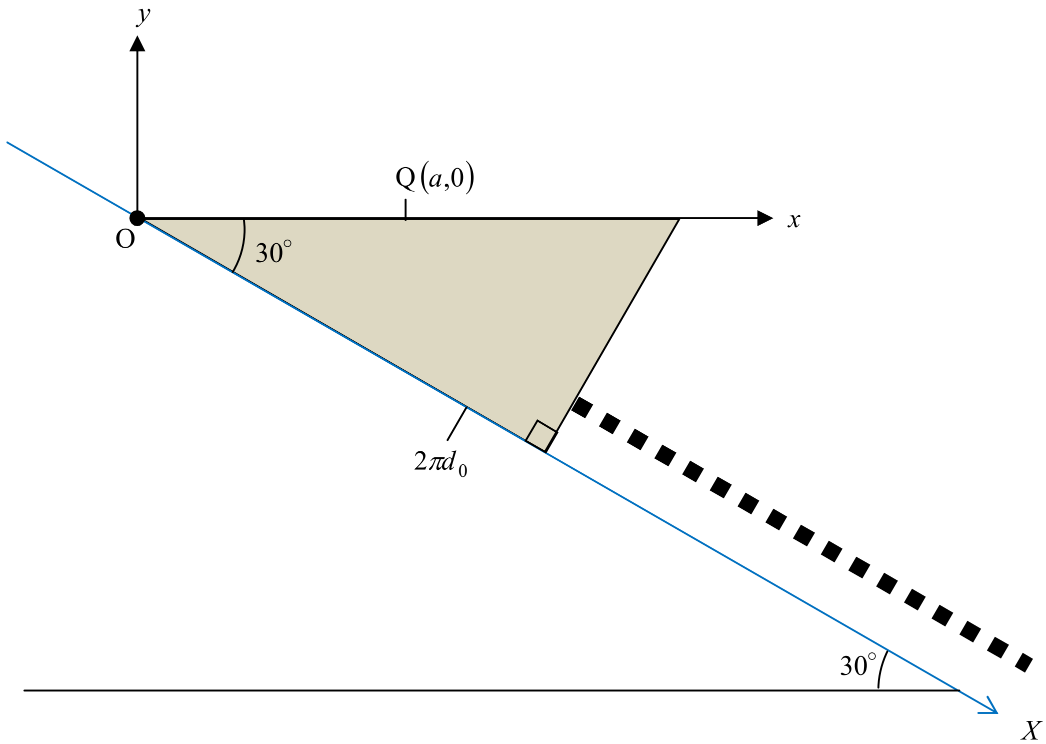
(c)

$\dfrac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}}=-e$，「物体 A の速度は衝突の影響を受けないものとする」より，

$\dfrac{v_1-V_y}{v_0-V_y}=-1 \quad \therefore v_1-V_y=-v_0+V_y$

よって，$v_1=-v_0+2V_y$　・・・(答)

(d)



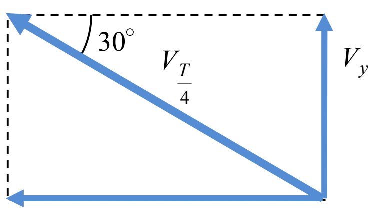
時刻 t での物体 A の速さを V_t，振動中心からの距離を X_t とすると，

単振動の力学的エネルギー保存則：$\dfrac{1}{2}MV_t{}^2+\dfrac{1}{2}kX_t{}^2=$一定 が成り立つ。

これと時刻 $t=0$ のとき $V_0=0$，$X_0=2\pi d_0$ 時刻 $t=\dfrac{T}{4}$ のとき $X_{\frac{T}{4}}=0$ より，

$0+\dfrac{1}{2}k(2\pi d_0)^2=\dfrac{1}{2}MV_{\frac{T}{4}}{}^2+0$

よって，$V_{\frac{T}{4}}{}^2=\dfrac{4k\pi^2}{M}d_0{}^2=\dfrac{4k\pi^2}{M}\cdot\left(\dfrac{Mg}{2k}\right)^2=\dfrac{\pi^2g^2M}{k} \quad \therefore V_{\frac{T}{4}}=\pi g\sqrt{\dfrac{M}{k}}$



これと左図より $V_y=V_{\frac{T}{4}}\sin 30°=\dfrac{1}{2}V_{\frac{T}{4}}$

$\therefore V_y=\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　・・・(答)

補足

単振動の振動中心からの変位を X_t とすると， $X_t = 2\pi d_0 \cos\omega t$

時刻 t における物体の速度を V_t とすると， $V_t = \dfrac{dX_t}{dt}$ より， $V_t = -2\pi d_0 \omega \sin\omega t$

よって， $t = \dfrac{T}{4}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
V_{\frac{T}{4}} &= -2\pi d_0 \omega \sin\frac{\omega T}{4} \\
&= -2\pi\frac{Mg}{2k}\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\frac{2\pi}{4} \\
&= -\pi g\sqrt{\frac{M}{k}}
\end{aligned}
$$

としてもよいが，

大学入試の問題は微分や積分を用いずとも解けるようになっている。

単振動の力学的エネルギー保存則を使って解くほうが楽である。

ただし，時間と変位の関係は，凡ミス防止の目的で，

$x = A\sin\omega t$ あるいは $x = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ を使う方が良いかもしれない。

たとえば，

変位が 0 から $\dfrac{A}{2}$ になるのにかかる時間を求める問題では，

$\dfrac{T}{4}$ で A だから $\dfrac{T}{8}$ という凡ミスが多い。

しかし， $x = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ を使うと，

$\dfrac{A}{2} = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ より， $\sin\dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{1}{2}$　 $\therefore \dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{\pi}{6}$　 $\therefore t = \dfrac{T}{12}$ となり，

そのようなミスをおかさずにすむ。

参考

物理小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/buturikoneta.html

単振動・単振動の力学的エネルギー保存則

(e)

$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=mgh_0$，$\dfrac{1}{2}m{v_1}^2=mgh_1$ より，$\dfrac{h_1}{h_0}=\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2$　・・・⑤

また，$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=mgh_0$，$h_0=\dfrac{\pi^2 Mg}{8k}$，$v_0<0$ より，

$v_0=-\sqrt{2gh_0}=-\sqrt{2g\cdot\dfrac{\pi^2 Mg}{8k}}=-\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　・・・⑥

$v_1=-v_0+2V_y$，$v_0=-\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$，$V_y=\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ より，

$v_1=\dfrac{3\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　・・・⑦

⑤，⑥，⑦より，$\dfrac{h_1}{h_0}=9$　・・・(答)

t_1 は衝突するまでの時間 $\dfrac{T}{4}$ と衝突後最高点に達するまでの時間の和である。

衝突後最高点に達するまでの時間を t とすると，$v_1-gt=0$ より，

$t=\dfrac{v_1}{g}=\dfrac{3\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}=\dfrac{3}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}=\dfrac{3}{4}T$

よって，

$t_1=\dfrac{T}{4}+\dfrac{3}{4}T=T$　・・・(答)

(f)

$0\le t\le\dfrac{T}{4}$

$y=h_0$ から自由落下し，$t=\dfrac{T}{4}$ で速度 v_0 となり，物体 A と弾性衝突する。

$\dfrac{T}{4}\le t\le\dfrac{7}{4}T$

$t=\dfrac{T}{4}$ で弾性衝突後，$t=T$ で最高点 $y=h_1=9h_0$ に達する。

小球 C の運動は，鉛直投げ上げ運動と同じだから，

再び $y=0$ になる時刻は $t_1+\dfrac{3}{4}T=T+\dfrac{3}{4}T=\dfrac{7}{4}T$

また，このときグラフより物体 A の位置も $y=0$ だから，再び小球 C との衝突が起こる。

$t=\frac{7}{4}T$ における衝突直後の速度と衝突後の最高点

衝突直前の小球 C の速度は $-v_1$，

また，物体 A は原点 O を斜面下向きに通過するから，その速度は $-V_y$

よって，小球 C の衝突直後の速度を v_2 とすると， $\frac{v_2-\left(-V_y\right)}{-v_1-\left(-V_y\right)}=-1$

$\therefore v_2=v_1-2V_y$

これと $v_1=-v_0+2V_y$ より， $v_2=-v_0$

速度 v_0 は， $0\leq t\leq\frac{T}{4}$ における衝突直前の速度だから，

$v_2=-v_0$ であることは， v_0 と同じ速さで跳ね返ったことを意味する。

よって，時刻 $t=\frac{7}{4}T+\frac{T}{4}=2T$ に最高点の $y=h_0$ に達する。