

68. 定積変化・断熱変化

状態 a,b,c,d における圧力を p_a, p_b, p_c, p_d とすると,

それぞれの状態数は,

状態 a(p_a, V_1, T_a), 状態 b(p_b, V_2, T_b), 状態 c(p_c, V_2, T_c), 状態 d(p_d, V_1, T_d)

と表される。

(1)

斜線部の面積 W は,

状態 c から状態 d へ変化したとき, 気体が外部に対してした仕事から

状態 a から状態 b へ変化したとき, 気体が外部からされた仕事を引いた値である。

ということは,

状態 c から状態 d へ変化したとき, 気体が外部に対してした仕事に

状態 a から状態 b へ変化したとき, 気体が外部に対してした仕事を足した値である。

そこで,

状態 a から状態 b へ変化したとき, 気体が外部に対してした仕事を W_{ab}

状態 c から状態 d へ変化したとき, 気体が外部に対してした仕事を W_{cd}

とすると,

断熱変化の熱力学第 1 法則の式: $0 =$ 内部エネルギー変化 + 気体が外部に対してした仕事より,

状態 a から状態 b への断熱変化

$$\begin{aligned} 0 &= C_v(T_b - T_a) + W_{ab} \\ \therefore W_{ab} &= -C_v(T_b - T_a) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

状態 c から状態 d への断熱変化

$$\begin{aligned} 0 &= C_v(T_d - T_c) + W_{cd} \\ \therefore W_{cd} &= -C_v(T_d - T_c) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より,

$$W = W_{ab} + W_{cd} = C_v(T_a - T_b + T_c - T_d) \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

(ア)

状態 $b(p_b, V_2, T_b)$ から状態 $c(p_c, V_2, T_c)$ への変化において、
系が吸収した熱量を Q_{bc} とすると、

$$\begin{aligned} Q_{bc} &= \Delta U_{bc} + W_{bc} \\ &= C_v(T_c - T_b) + 0 \quad \leftarrow \text{体積の変化が } 0 \text{ だから, } W_{bc} = 0 \\ &= C_v(T_c - T_b) \end{aligned}$$

ここで、 $p_c V_2 = RT_c$ 、 $p_b V_2 = RT_b$ 、 $p_c V_2 > p_b V_2$ より、 $T_c > T_b$
よって、

$$Q_{bc} = C_v(T_c - T_b) > 0 \quad \dots \text{(答)}$$

(イ)

状態 $d(p_d, V_1, T_d)$ から状態 $a(p_a, V_1, T_a)$ への変化において、
系が吸収した熱量を Q_{da} とすると、

$$\begin{aligned} Q_{da} &= \Delta U_{da} + W_{da} \\ &= C_v(T_a - T_d) + 0 \quad \leftarrow \text{体積の変化が } 0 \text{ だから, } W_{da} = 0 \\ &= C_v(T_a - T_d) \end{aligned}$$

ここで、 $p_a V_1 = RT_a$ 、 $p_d V_1 = RT_d$ 、 $p_d V_1 > p_a V_1$ より、 $T_a < T_d$
よって、

$$Q_{da} = C_v(T_a - T_d) < 0 \quad \dots \text{(答)}$$

(3)

各状態の変化の熱力学第 1 法則の式

$$\text{状態 a から状態 b : } 0 = \Delta U_{ab} + W_{ab} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{状態 b から状態 c : } Q_{bc} = \Delta U_{bc} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{状態 c から状態 d : } 0 = \Delta U_{cd} + W_{cd} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{状態 d から状態 a : } Q_{da} = \Delta U_{da} \quad \dots \textcircled{6}$$

ここで、③、④、⑤、⑥の左辺と右辺で和をとると、

$$Q_{bc} + Q_{da} = \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{cd} + \Delta U_{da} + W_{ab} + W_{cd} \quad \dots \textcircled{7}$$

となり、これは、1 サイクルの状態変化についての熱力学第 1 法則の式を表す。

 $\Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{cd} + \Delta U_{da}$ について

1 サイクルすると内部は初めの状態に戻るから、

内部エネルギーも初めのエネルギーに戻る。

よって、1 サイクルの内部エネルギー変化は 0 である。

$$\text{すなわち } \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{cd} + \Delta U_{da} = 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

 Q_1 について

$$Q_{bc} > 0 \text{ より, } Q_1 = |Q_{bc}| = Q_{bc}$$

$$\therefore Q_{bc} = Q_1 \quad \dots \textcircled{9}$$

 Q_2 について

$$Q_{da} < 0 \text{ より, } Q_2 = |Q_{da}| = -Q_{da}$$

$$\therefore Q_{da} = -Q_2 \quad \dots \textcircled{10}$$

$$(1) \text{ より, } W = W_{ab} + W_{cd} \quad \dots \textcircled{11}$$

⑧、⑨、⑩、⑪を⑦に代入すると、

$$Q_1 - Q_2 = W \quad \dots \text{(答)}$$

(4)

熱効率 $e = \frac{\text{仕事}}{\text{熱エネルギー的収入}}$ より,

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{Q_{bc}} = \frac{C_v(T_a - T_b + T_c - T_d)}{C_v(T_c - T_b)} = \frac{T_a - T_d}{T_c - T_b} + 1 \quad \dots \textcircled{12}$$

ここで,

n モルの気体の断熱変化について,

$$\text{断熱変化 } pV^\gamma = \text{一定}, \quad pV^\gamma = \frac{nRT}{V} V^\gamma = nRTV^{\gamma-1} \text{ より},$$

「 $TV^{\gamma-1} = \text{一定}$ 」が成り立つ。

これを使って,

状態 c から状態 d への断熱変化および状態 a から状態 b への断熱変化について考えると,

$$T_c V_2^{\gamma-1} = T_d V_1^{\gamma-1} \quad \dots \textcircled{13}$$

$$T_b V_2^{\gamma-1} = T_a V_1^{\gamma-1} \quad \dots \textcircled{14}$$

$$\frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}} \text{ より}, \quad \frac{T_c}{T_b} = \frac{T_d}{T_a}$$

$$\frac{T_c}{T_b} = \frac{T_d}{T_a} = k \text{ とおくと},$$

$$T_c = kT_b, \quad T_d = kT_a \quad \dots \textcircled{15}$$

⑫, ⑮より,

$$e = 1 + \frac{T_a - kT_a}{kT_b - T_b} = 1 - \frac{T_a(1-k)}{T_b(1-k)} = 1 - \frac{T_a}{T_b}$$

ここで, ⑭より, $\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ だから,

$$e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \dots \text{(答)}$$