74．円形波の反射

(2)

器壁で自由端反射してQに到達する波とQに直接到達する波の経路差$(\mathrm{OA}+\mathrm{AQ})-\mathrm{OQ}$が，

$(\mathrm{OA}+\mathrm{AQ})-\mathrm{OQ}=(2n-1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$を満たせばよい。

器壁で自由端反射してQに到達する波の経路$\mathrm{OA}+\mathrm{AQ}$について

Qと器壁に関して対称な点を$\mathrm{Q'}$とすると，

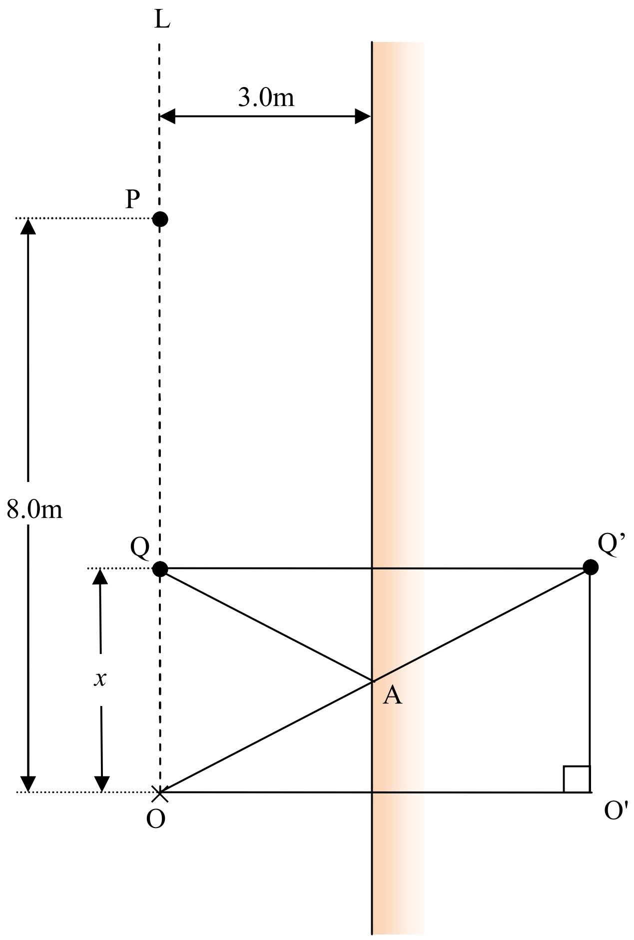
器壁は$\mathrm{QQ'}$の垂直二等分線であるから$\mathrm{AQ}=\mathrm{AQ'}$

よって，$\mathrm{OA}+\mathrm{AQ}=\mathrm{OA}+\mathrm{AQ'}=\mathrm{OQ'}$

ここで，$\Delta\mathrm{OO'Q'}$について，三平方の定理より，$\mathrm{OQ'}=\sqrt{\mathrm{O'Q'}^2+\mathrm{OO'}^2}=\sqrt{x^2+36}$

$\therefore \mathrm{OA}+\mathrm{AQ}=\sqrt{x^2+36}$

よって，$\sqrt{x^2+36}-x=(2n-1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$　・・・(答)



(3)

経路差を $f(x)$ とすると，

$f(x)=\sqrt{x^2+36}-x\ (x>0)$ より，

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+36}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2-36}}{\sqrt{x^2+36}}<0$$

よって，経路差 $f(x)$ は単調減少する。

これと，$\sqrt{x^2+36}-x=(2n-1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$ より，

x が大きいほど n は小さいことがわかる。

よって，水位が変化しない点の n の値は，O からみて遠い点から順に $n=1,2,3,\cdots$ となる。

ゆえに，P は $n=3$ に相当する。　・・・(答)

補足 1

(2)より，経路差は，直角三角形 Q'OO' の斜辺 OQ' の長さと高さ O'Q' $(=x)$ の長さの差であり，

$\angle$Q'OO'$=\theta$ とおくと，経路差は，$\mathrm{OQ'}-\mathrm{O'Q'}=\mathrm{OQ'}-\mathrm{OQ'}\sin\theta=\mathrm{OQ'}(1-\sin\theta)$ と表せる。

x を大きくしていくと，θ が 90° に近づいていくから，

経路差は小さくなっていくことが簡単にわかる。

よって，O からみて最も遠くある水位が変化しない点は，最も経路差が小さい点である。

ゆえに，最も遠い点から $n=1,2,3,\cdots$ となる。

補足 2

・経路差＝O'Q − OQ

・器壁は自由端だから，定常波の腹である。

よって，この現象は，同位相の 2 つの波源 O，O' からの波の干渉とみなしてよい。

したがって，水位が変化しない点，すなわち節を X とすると，

X は，$\mathrm{O'X}-\mathrm{OX}=(2n-1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$ を満たす点であり，

任意の n において，たとえば $n=1$ においては $\mathrm{O'X}-\mathrm{OX}=\dfrac{\lambda}{2}$ より，X は双曲線を描く。

また，n が小さい双曲線ほど線分 OO' の中点に，すなわち器壁により近い点を通る。

ゆえに，O からみて最も遠くある水位が変化しない点から $n=1,2,3,\cdots$ となる。

(5)

(3)より，経路差が最大となる点 Q の位置は， $O'Q' = OQ = 0$，すなわち点 O であり，
これは O から器壁に垂直に入射した波が器壁で反射し，再び O に戻る経路である。
よって，最大経路差$=(OA+AQ)-OQ = OO'-0 = OO' = 6.0\text{m}$

$\therefore 0\text{m} < $ 経路差 $\leq 6.0\text{m}$

節ができる位置の経路差$=(2n-1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$， $\lambda = 0.8\,\text{m}$ より，

自然数 n の範囲は， $0 < (2n-1)\cdot\dfrac{0.8}{2} \leq 6.0$　　$\therefore 0 < n \leq 8$

$n = 8$ は経路差が 6.0m のとき，すなわち O にあたる。
また，P は $n = 3$ にあたるから，
OP 間に，O と P 以外で水位が変化しない点の数は， $n = 4,5,6,7$ の 4 個　・・・(答)

補足：記述なしで解答してよい場合

定常波の節線（腹線）は点 O と点 O'からの距離の差が一定の点が描く軌跡，
すなわち双曲線であり，それは点 O と器壁の間を必ず通る。
したがって，点 O から器壁に対し垂直に入射した波とその反射波の干渉によりできる定常波の節の数について調べればよい。

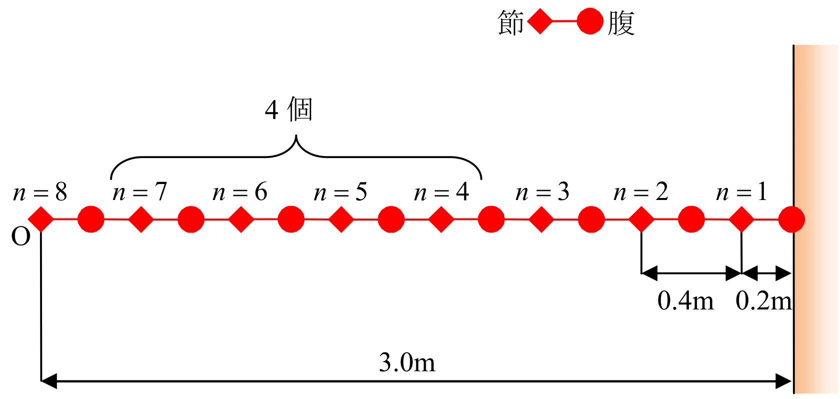
・自由端反射だから器壁は腹である。

・隣り合う節と節（隣り合う腹と腹）の間隔は $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{0.8}{2} = 0.4\,\text{m}$ である。

・隣り合う節と腹の間隔は $\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{0.8}{4} = 0.2\,\text{m}$ である。

・点 O と器壁の距離は 3.0m である。

より，下図のようになる。



双曲線の式

直線 OO’の中点を原点とし，O’の向きに x 軸，器壁の上向きに y 軸をとり，

$\mathrm{O}(-3,0)$，$\mathrm{O'}(3,0)$，節点 $\mathrm{P}(x,y)$ とすると，

$$\mathrm{O'P}-\mathrm{OP}=(2n-1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$\lambda=0.80$ より，$\mathrm{O'P}-\mathrm{OP}=0.40\cdot(2n-1)$

ここで，$d=0.40\cdot(2n-1)$ とおくと，

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}-\sqrt{(x+3)^2+y^2}=d \quad (x\leq 0)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}+d \quad (x\leq 0)$$

$$(x-3)^2+y^2=(x+3)^2+y^2+d^2+2d\sqrt{(x+3)^2+y^2} \quad (x\leq 0)$$

$$2d\sqrt{(x+3)^2+y^2}=-12x-d^2 \quad (x\leq 0)$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=-\frac{6}{d}x-\frac{d}{2} \quad (x\leq 0)$$

$$x^2+6x+9+y^2=\frac{36}{d^2}x^2+6x+\frac{d^2}{4} \quad (x\leq 0)$$

$$\frac{d^2-36}{d^2}x^2+y^2=\frac{d^2-36}{4} \quad (x\leq 0)$$

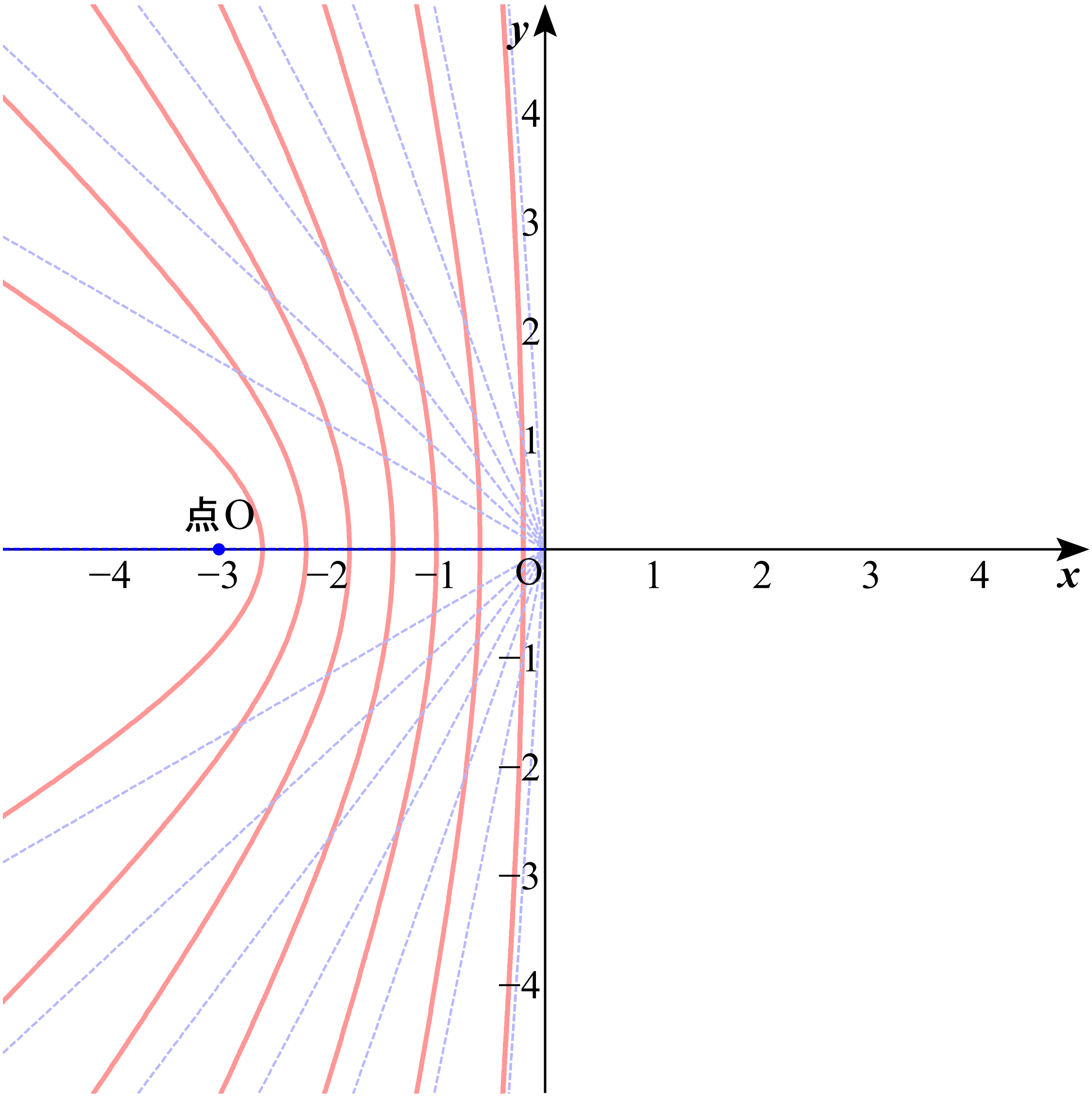
$$\frac{4}{d^2}x^2+\frac{4}{d^2-36}y^2=1 \quad (x\leq 0)$$

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{d^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{36-d^2}{4}}=1 \quad (x\leq 0)$$

$d=0.40\cdot(2n-1)$ より，

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{5}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{4(8-n)(7+n)}{25}}=1 \quad (x\leq 0)$$

漸近線 $y=\pm\dfrac{\frac{2\sqrt{(8-n)(7+n)}}{5}}{\frac{2n-1}{5}}x=\pm\dfrac{2\sqrt{(8-n)(7+n)}}{2n-1}x \quad (0<n\leq 8)\ (x\leq 0)$


y
4
3
2
1
点O
−4
−3
−2
−1
O
1
2
3
4
x
−1
−2
−3
−4

(6)

(5)より，O は節である。節と隣の腹との距離は $\dfrac{\lambda}{4}$ だから，$\dfrac{0.80}{4}=0.20\,\mathrm{m}$　・・・(答)

(8)・(9)

ドップラー効果の簡単な覚え方

音源の振動数：f_0，観測される振動数：$f_{観}$，観測者の速さ：$v_{観}$，音源の速さ：$v_{音}$，

音速：V とすると，

$$f_{観}=\frac{V\pm v_{観}}{V\pm v_{音}}\cdot f_0$$

分子の v のサブスクリプトが「観」，分母の v のサブスクリプトが「音」なので，

「観音様」と覚える。

また，符号の正負については，$f_{観}$ を大きくしようとするとき，

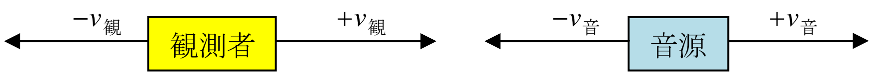
音源は観測者に対して近づこうとし，観測者は音源に対して近づこうとするので，

音源の運動方向については，

観測者に近づく向きのときは $-v_{音}$，観測者から遠ざかる向きのときは $+v_{音}$

観測者の運動方向については，

音源に近づく向きのときは $+v_{観}$，音源から遠ざかる向きのときは $-v_{観}$



問題の場合，音源を波源に，P を観測者，音速を波の速さに置き換えればよい。

よって，P が観測する振動数 $f_{観}=\dfrac{4.0-0}{4.0-1.0}\times 5.0=6.66$

よって，6.7Hz　・・・(**8** の答)

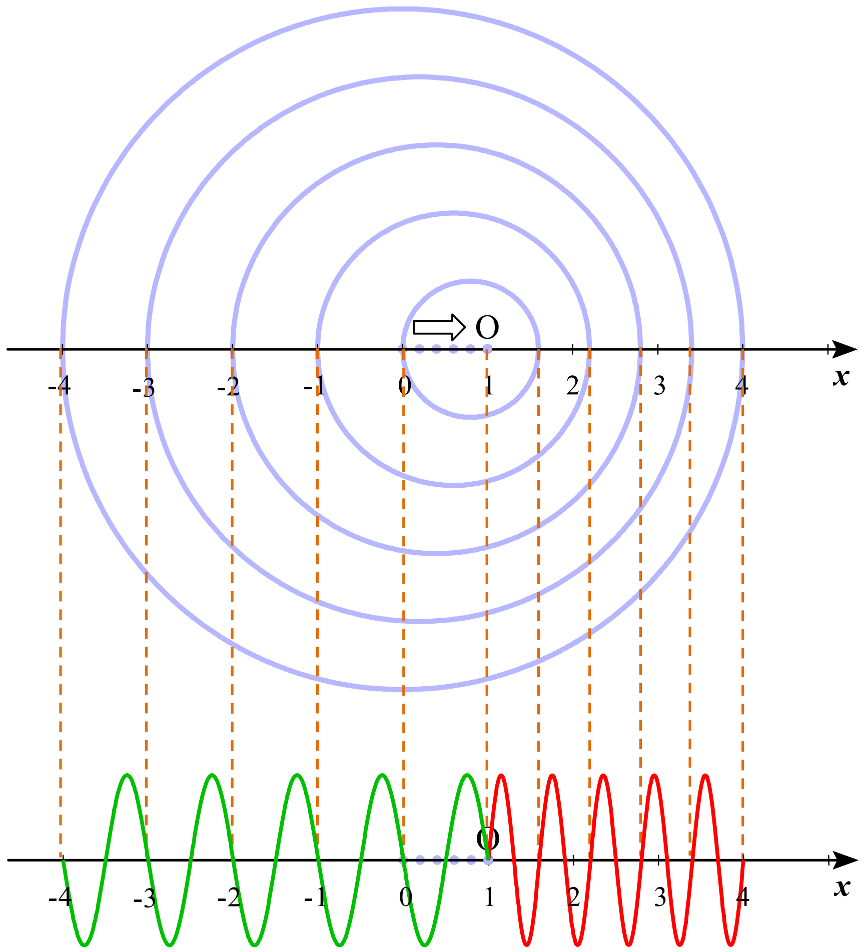
波の速さは媒質で決まり，問題文には，「波の速さは一定であるとする」とあるから，

求める波長を λ' とすると，$f_{観}\lambda'=4.0\,\mathrm{m/s}$ より，

$$\lambda'=\frac{4.0}{f_{観}}=\frac{4.0}{\dfrac{4.0-0}{4.0-1.0}\times 5.0}=0.6\,\mathrm{m}$$　・・・(**9** の答)

公式に頼らず，まともに解く場合

考え方 1：波長から解く



波源の速さの方が波の速さより小さいから，

波源が P に向かって 1 秒間に出した 5 つの波（赤色）は，すべて波源の前方にある。

波源が最初の位置，すなわち $x=0$ の位置で出した波は 1 秒後に $x=4$ の位置に届いている。

波源は 1 秒後に $x=1$ に位置するから，5 個の波は，$4-1=3\,\mathrm{m}$ に存在することになる。

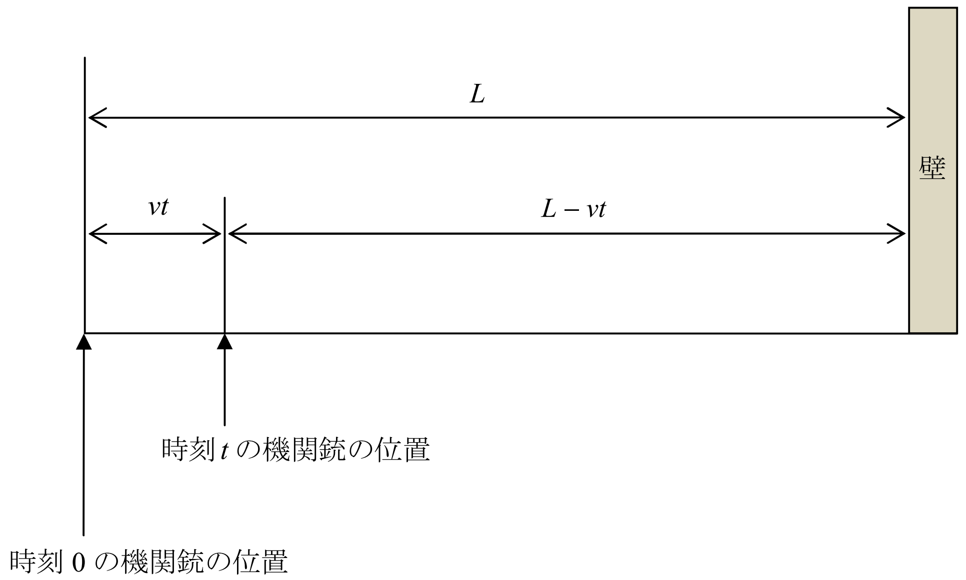
よって，波長を λ' とすると，$\lambda'=\dfrac{3\mathrm{m}}{5}=0.6\,\mathrm{m}$　・・・（**9** の答）

波の速さは媒質により決まるから，問題条件下では，変化しない。

よって，観測される振動数を f' とすると，$f'=\dfrac{4.0}{\lambda'}=\dfrac{4.0}{0.6}\approx 6.66\approx 6.7\,\mathrm{Hz}$　・・・（**8** の答）

考え方 2：波の到着時刻から解く

物騒ではあるが，波源を車載の機関銃，1 つの波を機関銃の 1 つの弾丸にたとえ，
車載の機関銃が距離 L 離れた垂直な壁に速さ v m/s の水平走行で近づきながら，
速さが V m/s 弾丸を壁面に垂直に t 秒間打ち込むとする。
ただし，弾丸の速さは一定とし，最初の弾丸を発射した時刻を 0 とする。
このとき，壁が弾丸をうけた時間を求めてみよう。



最初の弾丸が壁に打ち込まれた時刻 $= \dfrac{L}{V}$ ・・・①

時刻 t に発射された弾丸が壁に打ち込まれた時刻 $= t+\dfrac{L-vt}{V}$ ・・・②

よって，壁が弾丸をうけた時間は，
②－① より，

$$t+\frac{L-vt}{V}-\frac{L}{V}=\frac{V-v}{V}t$$

つまり，壁は t 秒間に発射された弾丸を $\dfrac{V-v}{V}t$ 秒間うけたことになる。

弾丸を 1 秒間発射したのであれば，壁は弾丸を $\dfrac{V-v}{V}$ 秒間うけたことになる。

したがって，
1 秒間に発射された弾丸の数を f とすると，

壁は f 個の弾丸を $\dfrac{V-v}{V}$ 秒間うけるから，

壁が 1 秒あたりにうける弾丸の数は，$\dfrac{f}{\dfrac{V-v}{V}}=\dfrac{V}{V-v}f$ となる。

このたとえを波の話に戻すと，

「1 秒間に発射された弾丸の数 f ＝波源の振動数」

「壁が 1 秒間あたりにうける弾丸の数＝観測される振動数」

だから，

観測される振動数$=\dfrac{V}{V-v}f$

問題の場合，

P が観測する振動数 $f_{観}=\dfrac{4.0-0}{4.0-1.0}\times 5.0=6.66$

よって，6.7Hz　・・・（**8** の答）

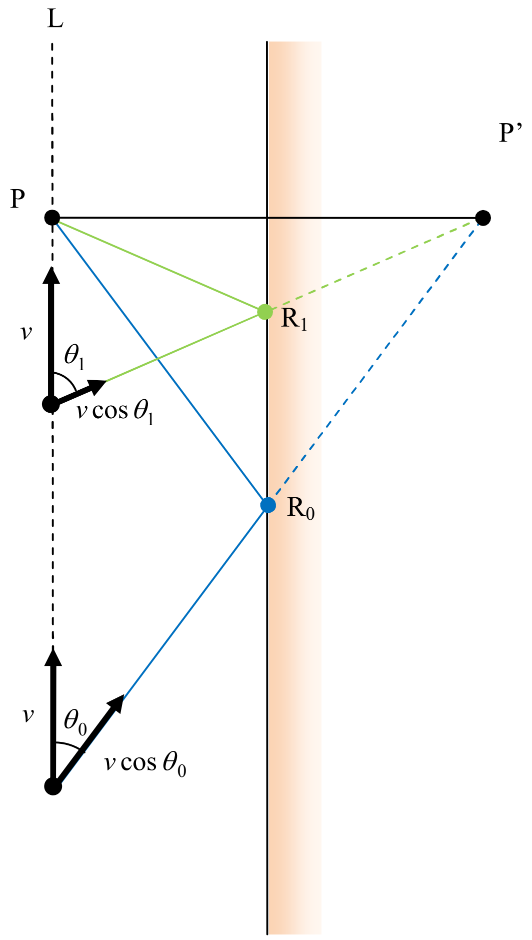
波の速さは媒質で決まり，問題文には，「波の速さは一定であるとする」とあるから，

求める波長を λ' とすると，$f_{観}\lambda'=4.0\,\mathrm{m/s}$ より，

$$\lambda'=\frac{4.0}{f_{観}}=\frac{4.0}{\dfrac{4.0-0}{4.0-1.0}\times 5.0}=0.6\,\mathrm{m}$$　・・・（**9** の答）

(10)

波源の速さの壁の反射点方向の成分が波源が O から動き始めた直後より小さくなるから，
反射点で観測する振動数もそれだけ小さくなる。
反射点で観測される波の振動数と反射される波の振動数は同じだから，
P に届く波の振動数も小さくなる。



波源の振動数を f，波の速さを V とすると，

R_0 での反射波の振動数 $f_{R_0} = \dfrac{V}{V - v\cos\theta_0} f$

R_0 での反射波の振動数 $f_{R_1} = \dfrac{V}{V - v\cos\theta_1} f$

$\cos\theta_0 > \cos\theta_1$ より， $f_{R_0} > f_{R_1}$