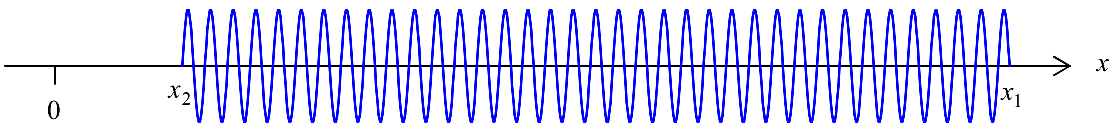
82. 観測者と音源が動く場合のドップラー効果

(1)



時刻 $t=0$ に発した超音波の変位の先端の時刻 $t=0+\Delta t_0=\Delta t_0$ における位置を x_1 とすると，

$x \ =V\Delta t_0$

時刻 $t=0+\Delta t_0=\Delta t_0$ に発した超音波の変位の後端の位置を x_2 とすると，

x_2 は，その時刻におけるコウモリの位置だから， $x_2=v\Delta$

よって，　$l=x_1-x_2=(V-v)\Delta t_0$

(2)

(2)～(4)の解法のポイント

数直線を用い，位置と時刻の関係から考えると式にしやすい。

Δt_1 について

ガに最後の超音波が当たった時刻から最初の超音波が当たった時刻を引けばよい。

最初の超音波がガに当たった時刻

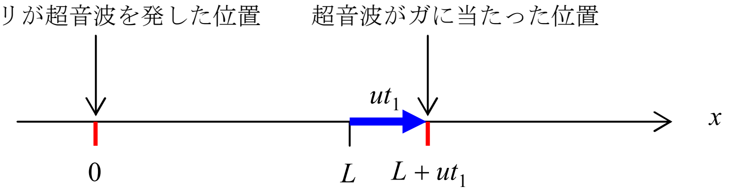
時刻 $t=0$ のコウモリの位置を $x=0$ としたときのガの位置を $x=L$ とする。

時刻 $t=0$ に発した超音波がガに当たった時刻を t_1 とすると，

超音波を発した位置 $x=0$， 時刻 t_1 のガの位置 $x=L+ut_1$ より，

超音波がガに当たるまでかかった時間は， $\dfrac{L+ut_1}{V}$

よって， $t_1=0+\dfrac{L+ut_1}{V}$　　$\therefore t_1=\dfrac{L}{V-u}$　　・・・①



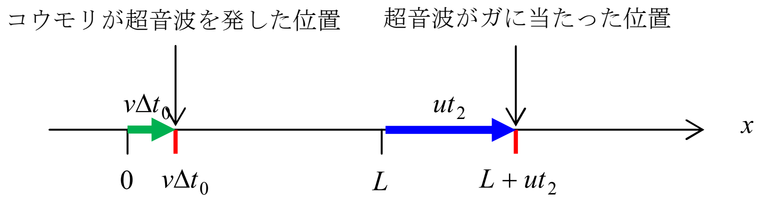
最後の超音波がガに当たった時刻

時刻 $t=\Lambda t_0$ に発した超音波がガに当たった時刻を t_2 とすると,

超音波が当たるまでかかった時間は, $\dfrac{(L+ut_2)-v\Delta t_0}{V}$ だから,

$$t_2=\Delta t_0+\frac{(L+ut_2)-v\Delta t_0}{V}$$

$$\therefore t_2=\frac{L+(V-v)\Delta t_0}{V-u} \quad ・・・②$$



①, ②より,

$$\Delta t_1=t_2-t_1=\frac{V-v}{V-u}\Delta t_0 \quad ・・・(答)$$

f_1 について

コウモリが発した超音波の波数＝ガに当たった超音波の波数より,

$$f_0\Delta t_0=f_1\Delta t_1$$

$$\therefore f_1=\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1}f_0=\frac{V-u}{V-v}f_0 \quad ・・・(答)$$

(3)

(a)

ガが最初に反射波を発した時刻と位置をそれぞれ $t=0$，$x=0$ とし，x 軸を左方向にとる。

x 軸を左方向にとったのは，私としては，その方が処理が楽だからである。

また，このときのコウモリの位置を L' とする。

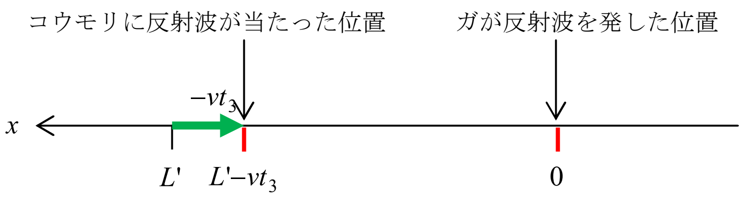
最初の反射波がコウモリに当たった時刻

求める時刻を t_3 とすると，

超音波を発した位置 $x=0$，時刻 t_3 のガの位置 $x=L'-vt_3$ より，

$$t_3=\frac{L'-vt_3}{V}$$

$$\therefore t_3=\frac{L'}{V+v} \quad ・・・③$$



最後の反射波がコウモリに当たった時刻

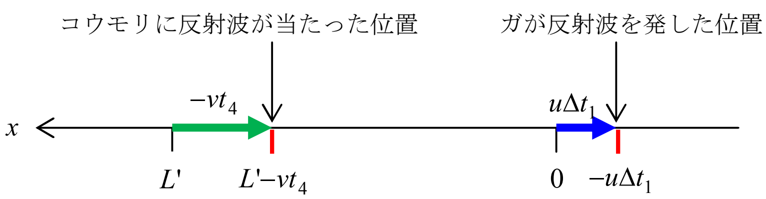
最後の反射波，すなわち時刻 $t=\Delta t_1$ の反射波がコウモリに当たった時刻を t_4 とすると，

時刻 $t=\Delta t_1$ に発した反射波がコウモリに当たった時刻を t_4 とすると，

当たるまでかかった時間は，$\dfrac{(L'-vt_4)-(-u\Delta t_1)}{V}$ だから，

$$t_4=\Delta t_1+\frac{L'-vt_4+u\Delta t_1}{V}$$

$$\therefore t_4=\frac{L'+(V+u)\Delta t_1}{V+v} \quad ・・・④$$



③，④より，

$$\Delta t_2 = t_4 - t_3 = \frac{V+u}{V+v}\Delta t_1$$

Δt_1 に $\Delta t_1 = \dfrac{V-v}{V-u}\Delta t_0$ を代入すると，

$$\Delta t_2 = \frac{V+u}{V+v}\cdot\frac{V-v}{V-u}\Delta t_0$$

よって，

$$r = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \frac{(V+u)(V-v)}{(V-u)(V+v)} \quad ・・・(答)$$

(b)

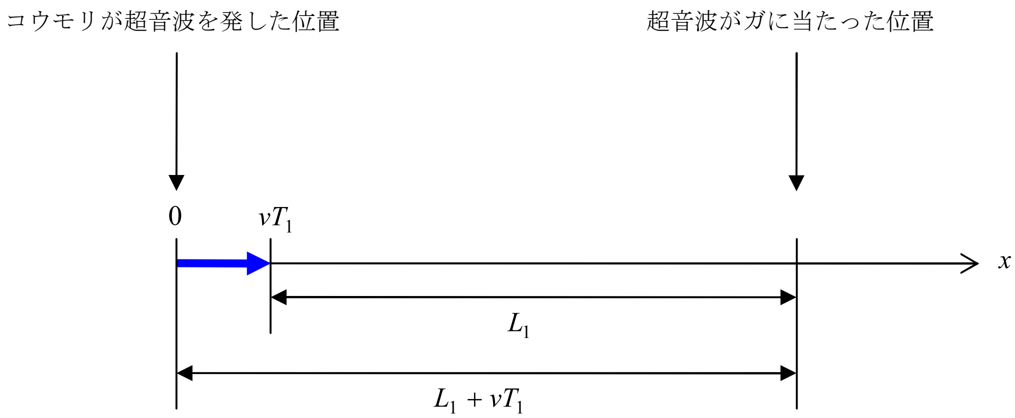
コウモリが発した超音波の波数＝コウモリに当たった反射波の波数より，

$f_2\Delta t_2 = f_0\Delta t_0$ より，

$$s = \frac{f_2}{f_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_2} = \frac{1}{r} \quad ・・・(答)$$

(4)

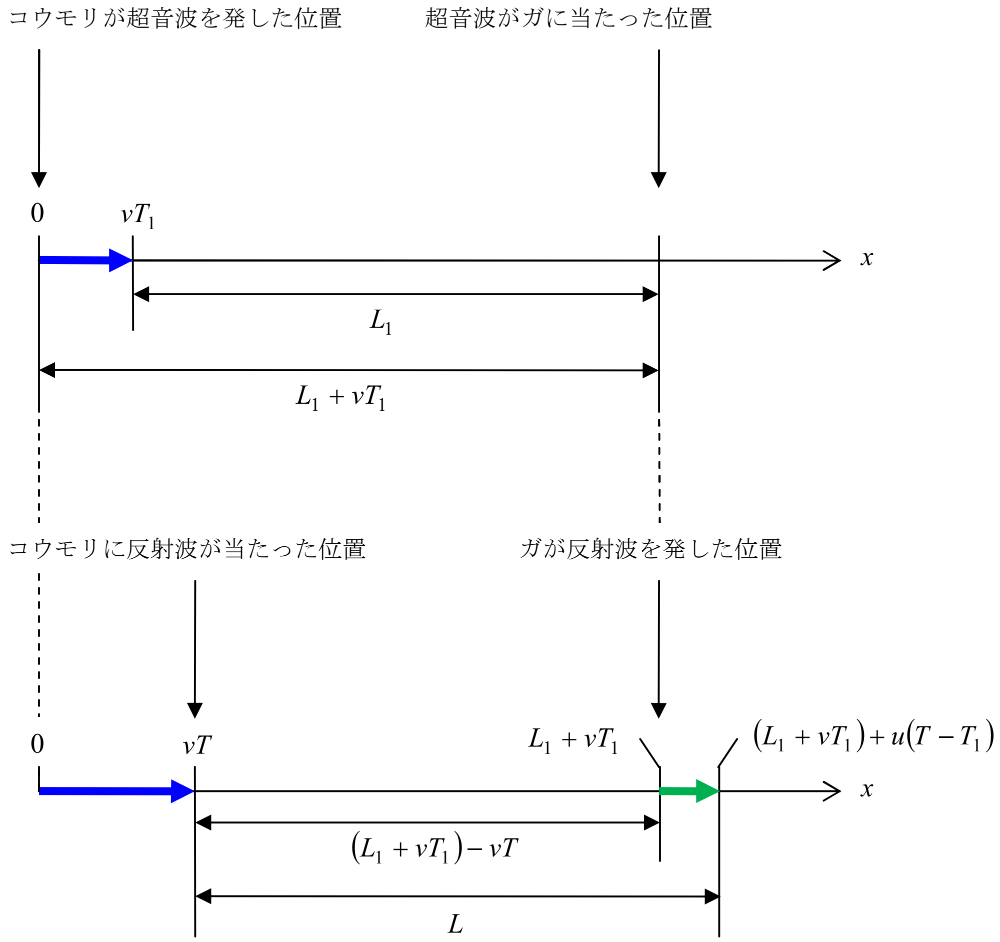
(a)



超音波が速さ V で，時間 T_1 かけて，距離 $L_1 + vT_1$ 伝わったから，

$T_1 = \dfrac{L_1 + vT_1}{V}$ より，$T_1 = \dfrac{L_1}{V-v} \quad ・・・(答)$

(b)



ガが反射波を発してからコウモリに当たるまでの時間＝$T-T_1$ より，
反射波は，速さ V で，時間 $T-T_1$ かけて，距離 $(L_1+vT_1)-vT$ 伝わったことになる。
よって，

$$T-T_1=\frac{(L_1+vT_1)-vT}{V}$$

$$\therefore L_1+(V+v)T_1=(V+v)T \quad ・・・⑤$$

また，$T_1=\dfrac{L_1}{V-v}$ より，

$$L_1=(V-v)T_1 \quad ・・・⑥$$

⑤，⑥より，

$$T_1=\frac{V+v}{2V}T,\quad L_1=\frac{(V-v)(V+v)}{2V}T$$

よって，

$$
\begin{aligned}
L &= \{(L_1 + vT_1) + u(T - T_1)\} - vT \\
&= L_1 + (v-u)T_1 + (u-v)T \\
&= \frac{(V-v)(V+v)}{2V}T + \frac{(v-u)(V+v)}{2V}T + (u-v)T \\
&= \frac{(V+u)(V-v)}{2V}T \quad \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$