97. 電場と電位

(1)

$+q$ がつくる点 P の電場を $\vec{E}_1$， $-4q$ がつくる点 P の電場を $\vec{E}_2$ とすると，

$$\vec{E}_1=\begin{pmatrix} k_0\dfrac{q}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{E}_2=\begin{pmatrix} k_0\dfrac{-4q}{\{x-(-a)\}^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

点 P の電場を $\vec{E}=\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ とすると， $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$ より，

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_0\dfrac{q}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k_0\dfrac{-4q}{\{x-(-a)\}^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k_0\dfrac{q}{x^2}-k_0\dfrac{4q}{(a+x)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k_0\dfrac{q(a-x)(a+3x)}{x^2(a+x)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$ ・・・(答)

(2)

電位とは，単位電荷がもつ静電気力の位置エネルギーのことである。
エネルギーは量（大きさ）だけをもつから，
電位は，つまり単位電荷がもつ静電気力の位置エネルギーは，
$+q$ がつくる電場による電位 V_1 と $-4q$ がつくる電場による電位 V_2 の和で与えられる。

よって， $V=V_1+V_2=k_0\dfrac{q}{|x|}+k_0\dfrac{-4q}{|x-(-a)|}$

点 P では， $x>0$， $x+a>0$ だから， $V=k_0\dfrac{q}{x}-k_0\dfrac{4q}{x+a}=k_0\dfrac{q(a-3x)}{x(a+x)}$ ・・・(答)

補足

$+q$ がつくる電場 $\vec{E}_{x1}$ の静電気力が単位電荷にする微小の仕事を dW_1 とすると，

$dW_1=\vec{E}_{x1}\cdot d\vec{x}=|E_{x1}||dx|\cos 180^\circ=-|E_{x1}||dx|=-|E_{x1}dx|$

$\therefore W=-\int_x^\infty |E_{x1}dx|$

単位電荷が無限遠から点 O に近づくとき， E_{x1} の正負が変化しないから，

$-\int_x^\infty |E_{x1}dx|=-\left|\int_x^\infty E_{x1}dx\right|$

$$\therefore W_1 = -\left|\int_x^{\infty} E_{x1} dx\right| = -k_0 q\left|\int_x^{\infty} \frac{1}{x^2} dx\right| = -k_0 q\left|\left[-\frac{1}{x}\right]_x^{\infty}\right| = -k_0 \frac{q}{|x|}$$

無限遠の単位電荷の位置エネルギー（電位）－静電気力がする仕事＝移動後の電位 V_1 より，

$$0 - \left(-k_0 \frac{q}{|x|}\right) = V_1$$

$$\therefore V_1 = k_0 \frac{q}{|x|}$$

$-4q$ がつくる電場 $\vec{E}_{x2}$ の静電気力が単位電荷にする微小の仕事を dW_2 とすると，

$$dW_2 = \vec{E}_{x2} \cdot d\vec{x} = |E_{x2}||dx|\cos 0° = |E_{x2}||dx| = |E_{x2} dx|$$

$$\therefore W_2 = \int_x^{\infty} |E_{x2} dx|$$

単位電荷が無限遠から点 A に近づくとき， E_{x2} の正負が変化しないから，

$$\int_x^{\infty} |E_{x2} dx| = \left|\int_x^{\infty} E_{x2} dx\right|$$

$$\therefore W_2 = \left|\int_x^{\infty} E_{x2} dx\right| = 4k_0 q\left|\int_x^{\infty} \frac{1}{(a+x)^2} dx\right| = 4k_0 q\left|\left[-\frac{1}{a+x}\right]_x^{\infty}\right| = 4k_0 \frac{q}{|a+x|}$$

無限遠の単位電荷の位置エネルギー（電位）－静電気力がする仕事＝移動後の電位 V_2 より，

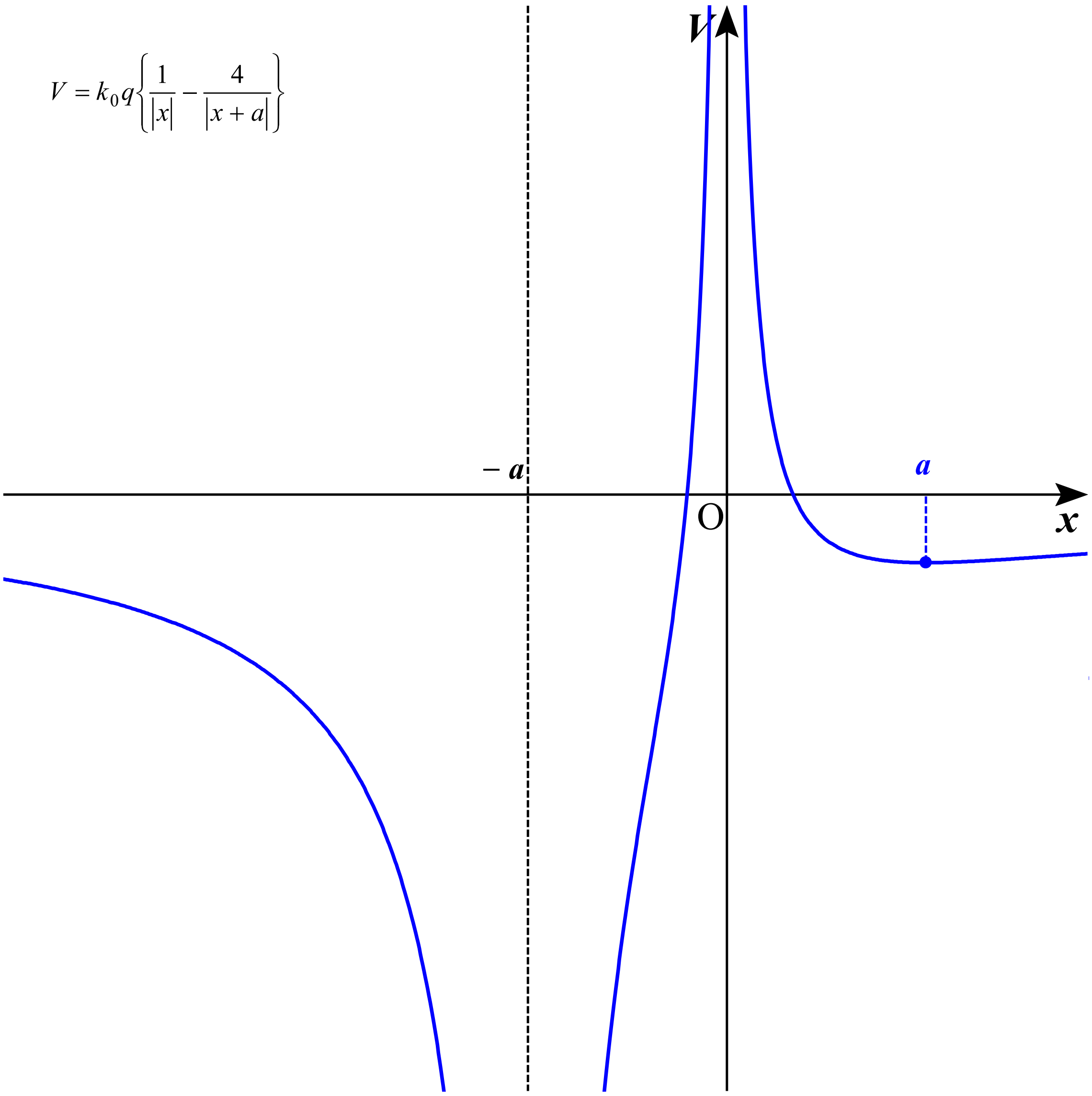
$$0 - k_0 \frac{4q}{|a+x|} = V_2$$

$$\therefore V_2 = -k_0 \frac{4q}{|a+x|}$$

参考サイト

物理小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/buturikoneta.html

総合　保存力


$V=k_0q\left\{\frac{1}{|x|}-\frac{4}{|x+a|}\right\}$
V
− a
a
O
x

(4)

点 R の位置を x_{R} とすると，題意より，$a - x_{\mathrm{R}} < 0$

よって，$E_{x_{\mathrm{R}}} = k_0 \dfrac{q(x_{\mathrm{R}} - a)(a + 3x_{\mathrm{R}})}{{x_{\mathrm{R}}}^2 (a + x_{\mathrm{R}})} < 0$

これと，$F = qE_{x_{\mathrm{R}}} < 0$ より，$q > 0$　・・・(答)

(5)

点 R

点電荷 Q の静電気力の位置エネルギー U_{R}

x 軸上の電位は(2)より，$k_0 \dfrac{q(a-3x)}{x(a+x)}$ であり，題意より点 R は無限遠として問題ない。

よって，$U_{\mathrm{R}} = \lim_{x\to\infty}\left\{q \cdot k_0 \dfrac{q(a-3x)}{x(a+x)}\right\} = \lim_{x\to\infty} k_0 \dfrac{q^2\left(\dfrac{a}{x^2} - \dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{a}{x} + 1} = 0$

点電荷 Q の運動エネルギー K_{R}

$K_{\mathrm{R}} = 0$

原点 O に最も近づいた点を $\mathrm{X}(X,0)$ とすると

点電荷 Q の静電気力の位置エネルギー U_{X}

$$U_{\mathrm{X}} = k_0 \frac{q^2(a-3X)}{X(a+X)}$$

点電荷 Q の運動エネルギー K_{X}

最も近づいたとき，点電荷 Q の速度は 0 だから，

$K_{\mathrm{X}} = 0$

力学的エネルギー保存則より，

$$0 + 0 = k_0 \frac{q^2(a-3X)}{X(a+X)} + 0$$

$$\therefore k_0 \frac{q^2(a-3X)}{X(a+X)} = 0$$

$$\therefore a - 3X = 0$$

$$\therefore X = \frac{a}{3}$$

(6)

別冊解答は加速度の向きが変化する点から解答しているが，

力学的エネルギー保存則から解答すると，次のようになる。

$$U=\frac{k_0q^2(a-3x)}{x(a+x)}\quad\left(x\geq\frac{a}{3}\right)$$

$$U'=k_0q^2\frac{(-3x)'\{x(a+x)\}-(a-3x)\{x(a+x)\}'}{\{x(a+x)\}^2}$$

$$=k_0q^2\frac{3x^2-2ax-a^2}{\{x(a+x)\}^2}$$

$$=k_0q^2\frac{(x-a)(3x+a)}{x^2(a+x)^2}$$

より，$U\left(x\geq\frac{a}{3}\right)$の増減は

x	$\frac{a}{3}$		a		∞
U'	$+$	$+$	0	$-$	
U	0	$\uparrow$	$-k_0\frac{q^2}{a}$	$\downarrow$	0

$K+U=0$ より，$K=-U$

よって，K の最大値は$k_0\frac{q^2}{a}$であり，このときの速さをvとすると，$\frac{1}{2}mv^2=k_0\frac{q^2}{a}$

$$\therefore v=q\sqrt{\frac{2k_0}{ma}}$$ ・・・(答)