104．スイッチの切りかえによる電荷の移動

(5)

定性的に解くと，

↓スイッチ S_1

コンデンサーC_1 と C_2 に電荷が蓄えられる。

↓スイッチ S_2

コンデンサーC_1 の電荷は極板間の静電気力により移動できない。
コンデンサーC_2 の電荷は C_3 に分配される。

↓スイッチ S_1

コンデンサーC_1 と C_2 に電荷が蓄えられる。

↓スイッチ S_2

コンデンサーC_1 の電荷は極板間の静電気力により移動できない。
コンデンサーC_2 の電荷は C_3 に分配される。

↓スイッチの開閉を繰り返していく

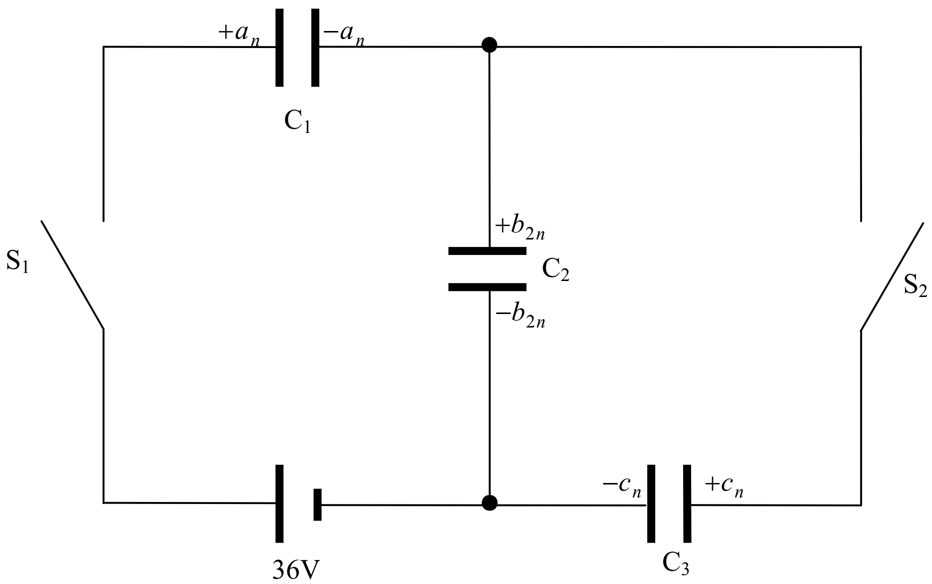
スイッチの開閉が繰り返される毎にコンデンサーC_3 に蓄えられる電荷は増加していくが，
一方で，コンデンサーC_2 からコンデンサーC_3 に分配（供給）される電荷は減少していく。

↓スイッチの開閉を無限に繰り返す

スイッチ S_2 を閉じてもコンデンサーC_2 からコンデンサーC_3 に電荷が分配されなくなる。
つまり，コンデンサーC_2 の電荷もコンデンサーC_3 の電荷も変化しなくなる。
よって，
スイッチ S_2 を閉じたままスイッチ S_1 を閉じても，どのコンデンサーの電荷も変化しない。
すなわち，
はじめからスイッチ S_1 とスイッチ S_2 を閉じ十分時間がたったときと同じ状態になる。
ゆえに，スイッチ S_1 とスイッチ S_2 を閉じた回路図で考えればよい。

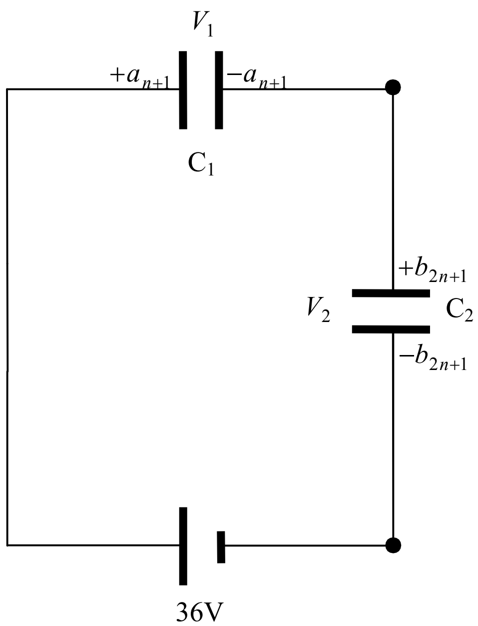
定量的に解いてみる。

n 回繰り返した後のコンデンサーC_1，C_2，C_3 に蓄えられた電荷をそれぞれ $a_n[\mu C]$，$b_{2n}[\mu C]$，$c_n[\mu C]$ とする。



スイッチ S_1 を閉じてから時間が十分に経過したとき

コンデンサーC_3 には電流が流れないから，次の閉回路で考えればよい。



C_1，C_2 の電圧をそれぞれ V_1，V_2 とすると，

$a_{n+1}=C_1V_1=V_1$，$b_{2n+1}=C_2V_2=V_2$　$(\because C_1=C_2=1\mu\mathrm{F})$・・・①

キルヒホッフの第 2 法則より，$V_1+V_2=36$　・・・②

電気量保存則より，$-a_n+b_{2n}=-a_{n+1}+b_{2n+1}$

これと①より，$-a_n+b_{2n}=-V_1+V_2$　・・・③

②，③より，

$$V_1=18+\frac{a_n-b_{2n}}{2},\quad V_2=18+\frac{-a_n+b_{2n}}{2}$$

よって，①より，

$$a_{n+1}=18+\frac{a_n-b_{2n}}{2}$$

$\therefore 2a_{n+1}=36+a_n-b_{2n}$　・・・④

$$b_{2n+1}=18+\frac{-a_n+b_{2n}}{2}$$

$\therefore 2b_{2n+1}=36-a_n+b_{2n}$　・・・⑤

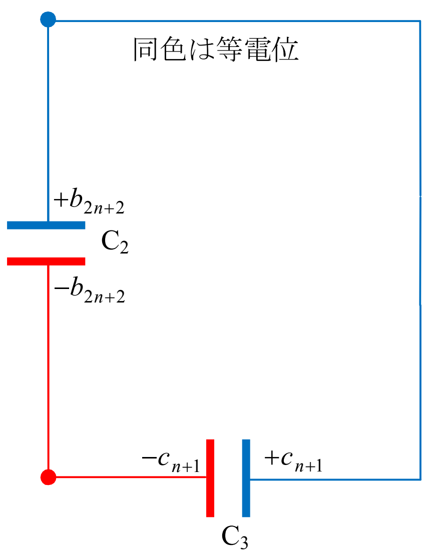
また，

（④＋⑤）÷2 より，$a_{n+1}+b_{2n+1}=36$

$\therefore a_n+b_{2n-1}=36$　・・・⑥

スイッチ S_1 を開き，スイッチ S_2 を閉じてから時間が十分に経過した時

コンデンサーC_1 の電荷は，極板間の静電気力により，移動できないから，
次の閉回路で考えればよい。



電気量保存則より，$b_{2n+1}+c_n=b_{2(n+1)}+c_{n+1}$ ・・・⑦

$\dfrac{b_{2(n+1)}}{c_{n+1}}=\dfrac{C_2V}{C_3V}=\dfrac{1}{2}$ より，$c_{n+1}=2b_{2(n+1)}$

$\therefore b_{2n}=\dfrac{c_n}{2}$ ・・⑧

⑦，⑧より，

$$b_{2n+1}=b_{2(n+1)}+c_{n+1}-c_n=\frac{c_{n+1}}{2}+c_{n+1}-c_n=\frac{3}{2}c_{n+1}-c_n$$

$\therefore b_{2n+1}=\dfrac{3}{2}c_{n+1}-c_n$ ・・・⑨

④に⑧を代入すると，

$2a_{n+1}=36+a_n-\dfrac{c_n}{2}$　$\therefore 4a_{n+1}-2a_n+c_n-72=0$ ・・・⑩

⑤に⑧，⑨を代入すると，

$3c_{n+1}-2c_n=36-a_n+\dfrac{c_n}{2}$　$\therefore 2a_n=72-6c_{n+1}+5c_n$ ・・・⑪

⑪を⑩の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}4a_{n+1}-2a_n+c_n-72&=2\cdot 2a_{n+1}-2a_n+c_n-72\\&=2(72-6c_{n+2}+5c_{n+1})-(72-6c_{n+1}+5c_n)+c_n-72\\&=-12c_{n+2}+16c_{n+1}-4c_n\end{aligned}$$

$\therefore c_{n+2}-\dfrac{4}{3}c_{n+1}+\dfrac{1}{3}c_n=0$ ・・・⑫

⑫が $c_{n+2}-\alpha c_{n+1}=\beta(c_{n+1}-\alpha c_n)$ の形で表せるとすると，

$c_{n+2}-(\alpha+\beta)c_{n+1}+\alpha\beta\cdot c_n=0$

よって，$\alpha+\beta=\dfrac{4}{3},\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

これは，α,β が，$x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}=0$ の解であることを示しており，

$x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}=(x-1)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ より，

$(\alpha,\beta)=\left(1,\dfrac{1}{3}\right),\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

$(\alpha,\beta)=\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$$c_{n+2}-\frac{1}{3}c_{n+1}=c_{n+1}-\frac{1}{3}c_n=\cdots=c_2-\frac{1}{3}c_1$$

$\boxed{\text{オ}}$より $c_1=12$，$\boxed{\text{キ}}$より $c_2=16$ だから，$c_2-\dfrac{1}{3}c_1=12$

よって，

$c_{n+1}-\dfrac{1}{3}c_n=12$　・・・⑬

$(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ のとき

$c_{n+2}-c_{n+1}=\dfrac{1}{3}(c_{n+1}-c_n)$　　$\therefore \dfrac{c_{n+2}-c_{n+1}}{c_{n+1}-c_n}=\dfrac{1}{3}$

よって，$c_{n+1}-c_n$ は公比 $\dfrac{1}{3}$，初項 $c_2-c_1=16-12=4$ の等比数列である。

$\therefore c_{n+1}-c_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　・・・⑭

⑬－⑭より，

$\dfrac{2}{3}c_n=12-4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，

$c_n=18-6\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　・・・⑮

⑮を⑪に代入すると，

$$\begin{aligned}2a_n&=72-6c_{n+1}+5c_n\\&=72-6\left\{18-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+5\left\{18-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=72-6\left\{18-6\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}+5\left\{18-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=54-18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

よって，

$a_n=27-9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　・・・⑯

⑮を⑧に代入すると，

$$b_{2n} = \frac{c_n}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$= 9 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，

$$b_{2n} = 9 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad ・・・⑰$$

⑮を⑨に代入すると，

$$b_{2n+1} = \frac{3}{2}c_{n+1} - c_n$$
$$= \frac{3}{2}\left\{18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\} - \left\{18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$= \frac{3}{2}\left\{18 - 6 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} - \left\{18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$= 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$n = 0$ を代入すると $b_1 = 18$

一方，$\boxed{\text{ア}}$より，$Q_1 = 18$

これは，$n = 0$ の場合でも成り立つことを示している。

そこで，定義域を自然数とする数列に書き改めると，

$$b_{2n-1} = 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$
$$= 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= 9 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= 9\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，

$$b_{2n-1} = 9\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad ・・・⑱$$

まとめ

n 回繰り返した後のコンデンサーC$_1$，C$_2$，C$_3$ に蓄えられた電荷を
それぞれ $a_n[\mu\mathrm{C}]$，$b_{2n}[\mu\mathrm{C}]$，$c_n[\mu\mathrm{C}]$ とすると，
⑮，⑯，⑰，⑱より，
スイッチ S$_1$ を閉じた回数が n 回後のコンデンサーC$_1$ に蓄えられる電荷

$$a_n = 27 - 9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

スイッチ S$_1$ を閉じた回数が n 回後のコンデンサーC$_2$ に蓄えられる電荷

$$b_{2n-1} = 9\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

スイッチ S$_2$ を閉じた回数が n 回後のコンデンサーC$_2$ に蓄えられる電荷

$$b_{2n} = 9 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

スイッチ S$_2$ を閉じた回数が n 回後のコンデンサーC$_3$ に蓄えられる電荷

$$c_n = 18 - 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，無限に操作を繰返したとき，

コンデンサーC$_1$ に蓄えられる電荷：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 27[\mu\mathrm{C}]$

コンデンサーC$_2$ に蓄えられる電荷：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = 9[\mu\mathrm{C}]$

コンデンサーC$_3$ に蓄えられる電荷：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 18[\mu\mathrm{C}]$

補足

4 項間漸化式 $a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ の場合
$a_{n+3} - (\alpha + \beta)a_{n+2} + \alpha\beta a_{n+1} = \gamma\{a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n\}$ とおくと，
$a_{n+3} - (\alpha + \beta + \gamma)a_{n+2} + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)a_{n+1} - \alpha\beta\gamma r a_n = 0$ より，
$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$ となるので，
α, β, γ は 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解である。
これを活かして数列 $\{a_n\}$ 一般項を求めればよい。