

117. コンデンサーを含む回路と抵抗で消費されるエネルギー

(1)

抵抗を移動した電荷はコンデンサー1に蓄えられることと
 電流は単位時間に運ばれる電荷の大きさであることから、
 ある時刻 t において抵抗を流れる電流を $I(t)$ とすると、
 $I(t)$ はコンデンサー1の極板に蓄えられる電荷の変化の極限で表される。
 すなわち

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(Q + \Delta Q) - Q}{(t + \Delta t) - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad \therefore dQ = I(t)dt \quad \therefore Q = \int_0^{\infty} I(t)dt$$

よって、 Q は図2の影を付けた部分の面積に他ならない。

$$\therefore Q = I_0 T \quad \dots \textcircled{1}$$

一方、十分時間が経ったときコンデンサー1に蓄えられた電荷は

$$Q = CV \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, C = \frac{I_0 T}{V} \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで、時刻 t におけるコンデンサーの電圧を $V_c(t)$ とすると、

$$\text{キルヒホッフの法則より}, V = RI(t) + V_c(t)$$

$$t=0 \text{ のとき}, I(0) = I_0, V_c(0) = 0 \text{ だから}, V = RI_0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{よって}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より}, C = \frac{T}{R} \quad \dots \text{(答)}$$

補足：図2のグラフの方程式を求めてみる。

時刻 t におけるコンデンサーの電圧を $V_c(t)$ とすると、

$$\text{これとキルヒホッフの法則より}, V = RI(t) + V_c(t)$$

$$\text{これと } V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}, I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \text{ より}, V = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\therefore CV - Q(t) = RC \cdot \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\therefore \frac{1}{CV - Q(t)} dQ(t) = \frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \int \frac{1}{CV - Q(t)} dQ(t) = \int \frac{dt}{RC}$$

$$\text{積分定数を } \alpha \text{ とすると}, -\log(CV - Q(t)) = \frac{t}{RC} + \alpha \quad (\because CV > Q(t))$$

$$\therefore CV - Q(t) = e^{-\left(\frac{t}{RC} + \alpha\right)}$$

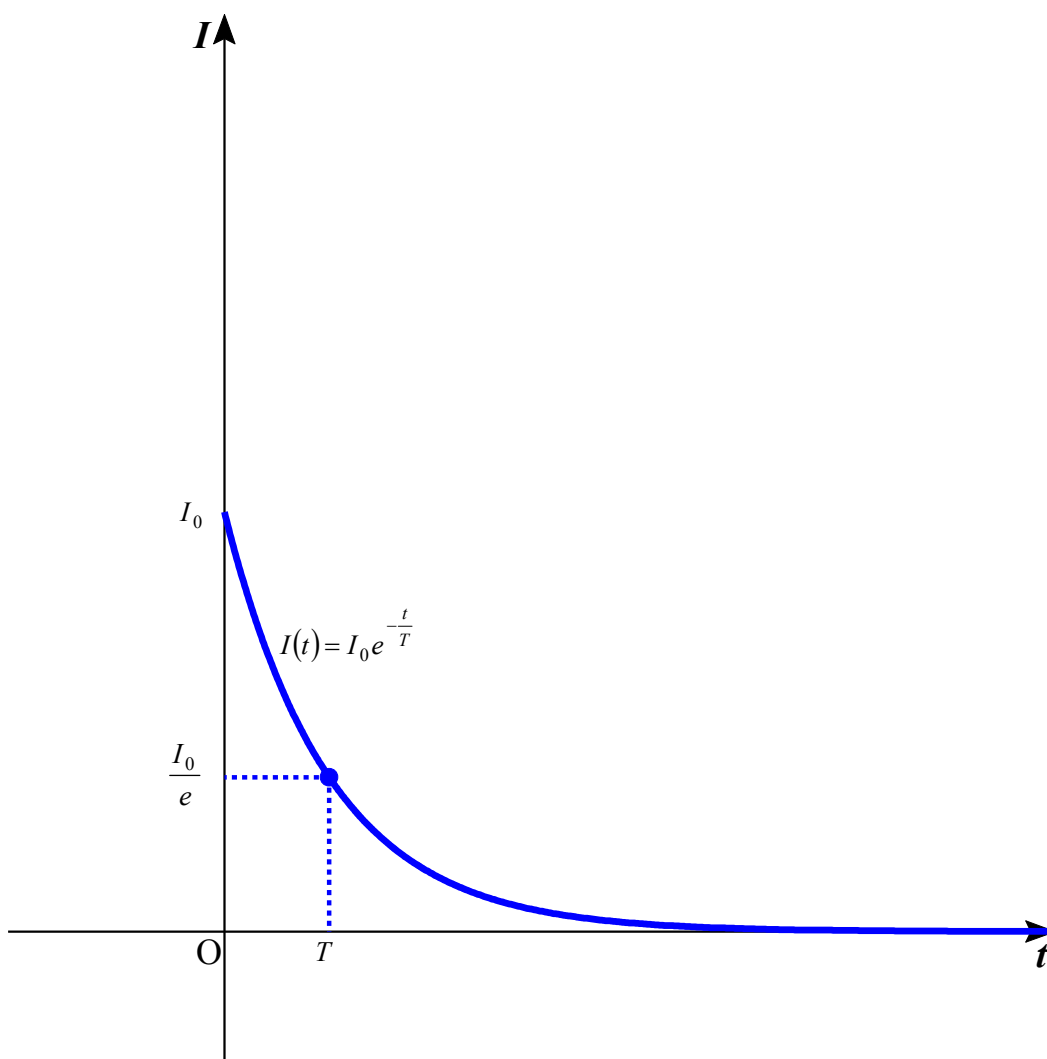
$t=0$ のとき $Q(0)=0$ だから, $CV = e^{-\alpha}$

$$\begin{aligned}\therefore CV - Q(t) &= e^{-\left(\frac{t}{RC} + \alpha\right)} \\ &= e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{-\alpha} \\ &= e^{-\frac{t}{RC}} \cdot CV\end{aligned}$$

$$\therefore Q(t) = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

よって, $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ であり, これと $\frac{V}{R} = I_0$, $RC = T$ より,

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$



(2)

抵抗の値が $\frac{R}{2}$ のとき, $t=0$ のときの電流を I_0' , 電流が $\frac{I_0'}{e}$ に減少した時刻を $t=T'$

とすると, 十分時間が経ったときコンデンサーに蓄えられた電荷は $I_0'T'$ である。

一方, コンデンサー1 に蓄えられる電荷は抵抗の値に依らず同じだから, $I_0'T'$ は抵抗の値が R のときの I_0T と等しい。よって, $I_0'T' = I_0T$ であり,

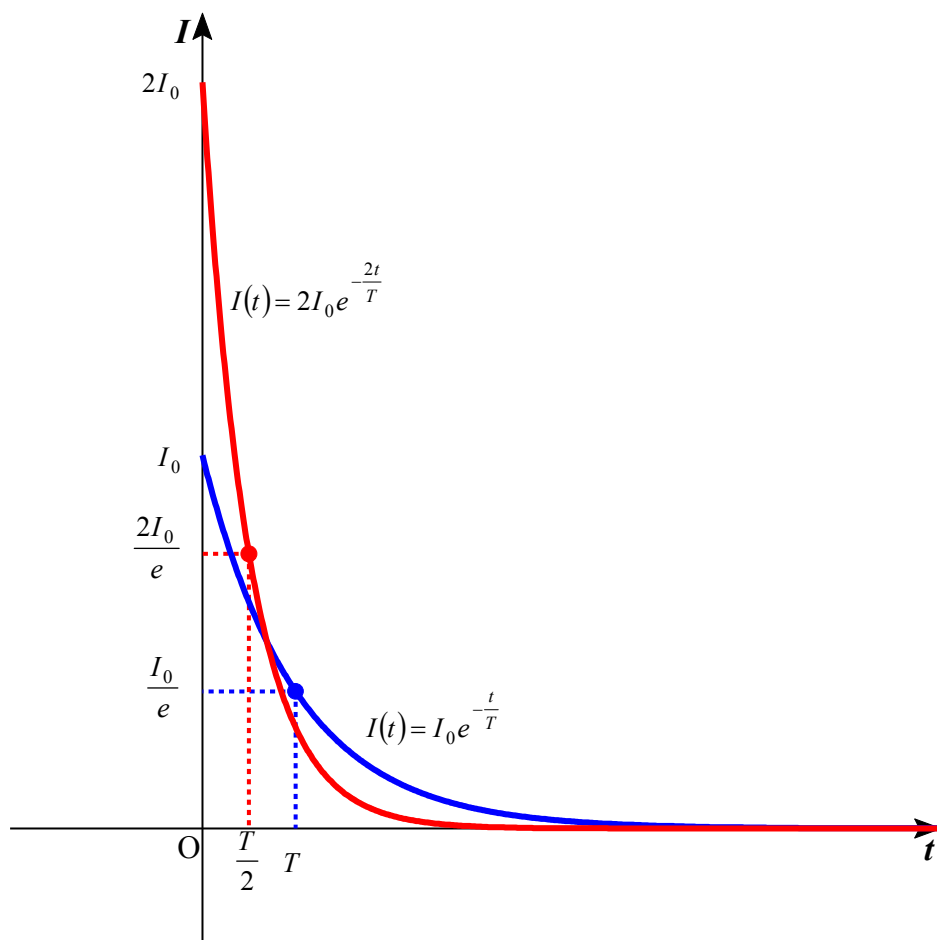
$$\text{これと } I_0' = \frac{V}{\frac{R}{2}} = \frac{2V}{R} = 2I_0 \text{ より, } T' = \frac{T}{2}$$

よって, $t=0$ のときの電流 $I_0' = 2I_0$, 電流が $\frac{I_0'}{e} = \frac{2I_0}{e}$ に減少した時刻 $t = T' = \frac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

(1)の $I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ の R に $\frac{R}{2}$ を代入することにより, $I(t) = \frac{2V}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$

これと $\frac{V}{R} = I_0$, $RC = T$ より, $I(t) = 2I_0 e^{-\frac{2t}{T}}$



(3)

コンデンサー1 とコンデンサー2 の電気容量が同じであることと
放電前のコンデンサー1 に蓄えられている電荷が $I_0 T$ であることから、

十分時間が経つと、コンデンサー2 に蓄えられた電荷は $\frac{I_0 T}{2}$ になる。

よって、抵抗を負の向きに移動した電荷の大きさは $\frac{I_0 T}{2} - 0 = \frac{I_0 T}{2}$

したがって、時刻 $t=0$ のときの電流を I_0'' 、電流が $\frac{I_0''}{e}$ に減少した時刻を $t=T''$ とすると

$$|I_0'' T''| = \left| \frac{I_0 T}{2} \right| \quad \dots \textcircled{1}$$

また、スイッチ2 を閉じる前のコンデンサー2 の極板間の電圧は0だから、
コンデンサー2 の2つの極板の電位はいずれもコンデンサー1 の負極板の電位と等しい。
よって、スイッチ2 を閉じた瞬間のコンデンサー1 の正極板とコンデンサー2 の電位差は
コンデンサー1 の極板間の電位差と等しい。すなわち電位差は V である。

よって、 $I_0'' = -\frac{V}{R} = -I_0 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, T'' = \frac{T}{2}$$

以上より、

時刻 $t=0$ のときの電流 $I_0'' = -I_0$ 、電流が $\frac{I_0''}{e}$ に減少した時刻 $t=T'' = \frac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

コンデンサー1 の極板間の電圧を $V_1(t)$ 、コンデンサー2 の極板間の電圧を $V_2(t)$ 、
電流を $I(t)$ とすると、回路の起電力が0だから、
キルヒホッフの法則の式は $0 = V_1(t) + RI(t) + V_2(t)$

放電中のコンデンサー1 に蓄えられている電荷を $Q(t)$ とすると $V_1(t) = \frac{Q(t)}{C}$ 、

$V_2(t)$ は $V_1(t)$ と逆向きでありかつ孤立部分の電気量 CV が保存されることから、

$$V_2(t) = -\frac{CV - Q(t)}{C} = -V + \frac{Q(t)}{C}$$

これと $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ より、キルヒホッフの式は $0 = \frac{Q(t)}{C} + R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} - V + \frac{Q(t)}{C}$ となる。

$$\therefore CV - 2Q(t) = RC \cdot \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\therefore \frac{1}{2Q(t) - CV} dQ(t) = -\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \int \frac{1}{2Q(t) - CV} dQ(t) = -\int \frac{dt}{RC}$$

積分定数を β とすると, $\frac{\log(2Q(t) - CV)}{2} = -\frac{t}{RC} + \beta$ $\left(\because \frac{CV}{2} < Q(t) \leq CV \right)$

$$\therefore 2Q(t) - CV = e^{2\beta} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$t=0$ のとき $Q(0) = CV$ より, $CV = e^{2\beta}$

よって, $2Q(t) - CV = CV \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$

$$\therefore Q(t) = \frac{CV}{2} \left(1 + e^{-\frac{2t}{RC}} \right) \quad \left(\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{CV}{2} \left(1 + e^{-\frac{2t}{RC}} \right) = \frac{CV}{2} \text{ であることがわかる} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore I(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} \\ &= -\frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \end{aligned}$$

$\frac{V}{R} = I_0$, $RC = T$ より, $I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{2t}{T}}$

