

133. RLC 直列回路

(2)

たとえば、b に対する a の電圧を V_0 、その最大値を $V_{0\max}$ 、角振動数を ω とすると、
 適当な基準時刻をとることにより、 $V_0 = V_{0\max} \sin \omega t$ と表せる。

よって、a の極板の電荷を Q とすると、 $Q = CV_{0\max} \sin \omega t \quad \dots \textcircled{1}$

また、極板 a に入出入りする電流を I とすると、 $I > 0$ のとき Q は増加するから、

$$I dt = dQ \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= CV_{0\max} \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega CV_{0\max} \cos \omega t \\ &= \omega CV_{0\max} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega CV_{0\max}$ は最大電流であり、これを I_{\max} とおくと、

$$I = I_{\max} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

尚、 $I_{\max} = \omega CV_{0\max} = \frac{V_{0\max}}{\frac{1}{\omega C}}$ とオームの法則 $I = \frac{V}{R}$ より、

$\frac{1}{\omega C}$ はオームの法則の抵抗 R に相当し、この $\frac{1}{\omega C}$ を容量リアクタンスという。

①, ③より、

コンデンサーを流れる電流の位相を基準にすると、

コンデンサーにかかる電圧の位相はそれより $\frac{\pi}{2}$ 遅れることになる。

つまり、 V_0 の位相は回路を流れる電流の位相より $\frac{\pi}{2}$ 遅れている。

よって、コンデンサーと抵抗の直列回路を流れる電流を $I = I_{\max} \sin \omega t$ とおけば、

$$\text{コンデンサーにかかる電圧は、} V_0 = V_{0\max} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

一方、抵抗にかかる電圧は抵抗が 1Ω だから、 $V_1 = 1 \cdot I_{\max} \sin \omega t \quad \dots \textcircled{5}$

また、 V_1 の最大値を $V_{1\max}$ とおくと、 $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max}$

④, ⑤より, V_0 の位相は V_1 より $\frac{\pi}{2}$ 遅れている。

図 2 で, 適当な定数 A_0, B_0 を用いると, 波形 A は $-A_0 \cos \omega t$, 波形 B は $B_0 \sin \omega t$ と表せ,
 $-A_0 \cos \omega t = A_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ より, 波形 A は波形 B より位相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れていることがわかる。
 よって, 波形 A は V_0 , 波形 B は V_1 である。

(3)

(2)の解説より, $I_{\max} = \omega C V_{0\max}$, $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max}$

条件より, $V_{0\max} = 40[\text{V}]$, $V_{1\max} = 40 \times 10^{-3}[\text{V}]$

図 2 より, 周期 $T = 1 \times 10^{-2}[\text{s}]$

よって,

$$\begin{aligned} C &= \frac{I_{\max}}{\omega V_{0\max}} \\ &= \frac{40 \times 10^{-3}}{\frac{2\pi}{1 \times 10^{-2}} \cdot 40} \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 10^{-5}[\text{F}] \end{aligned}$$

(4)

(2)と同様に b に対する a の電圧を V_0 とすると, $\frac{dI}{dt} > 0$ のとき $V_0 > 0$ だから,

$I = I_{\max} \sin \omega t$ とすると,

$$\begin{aligned} V_0 &= L \frac{dI}{dt} \\ &= LI_{\max} \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega LI_{\max} \cos \omega t \\ &= \omega LI_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

ここで $\omega LI_{\max} = V_{0\max}$ とおくと,

$$V_0 = V_{0\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

尚, $V_{0\max} = \omega LI_{\max}$ とオームの法則 $V = RI$ より,

ωL はオームの法則の抵抗 R に相当し, これを誘導リアクタンスという。

一方, 抵抗にかかる電圧は $V_1 = 1 \cdot I_{\max} \sin \omega t$

よって, V_0 の位相は V_1 より $\frac{\pi}{2}$ 進んでおり, 図 3 で V_0 を表す波形は, (2)と同様にして,

B となる。

よって, $V_{0\max} = 10[\text{V}]$, $V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max} = 4[\text{V}]$

また, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \times 10^{-2}} = 2\pi \times 10^2$

$V_{0\max} = \omega L I_{\max}$ より, $L = \frac{V_{0\max}}{\omega I_{\max}} = \frac{10}{2\pi \times 10^2 \times 4} = \frac{1}{8\pi} \times 10^{-1} [\text{H}]$

(5)

LCR 直列回路と共振周波数

LCR 直列回路を流れる電流 I を $I = I_{\max} \sin \omega t$ とし,

このとき, 交流電源の起電力 V が $V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ であるとする。

ここで V_{\max} を一定に保ち, 角振動数 ω だけを変えていくと,

ある角振動数 ω_0 において回路のインピーダンス, つまり交流回路の抵抗が最小となり, その結果, 最大の電流が回路を流れることになる。

この現象を直列共振, また, 角振動数 ω_0 を与える周波数を共振周波数という。

(共振周波数を f_0 とすると, $\omega_0 = 2\pi f_0$)

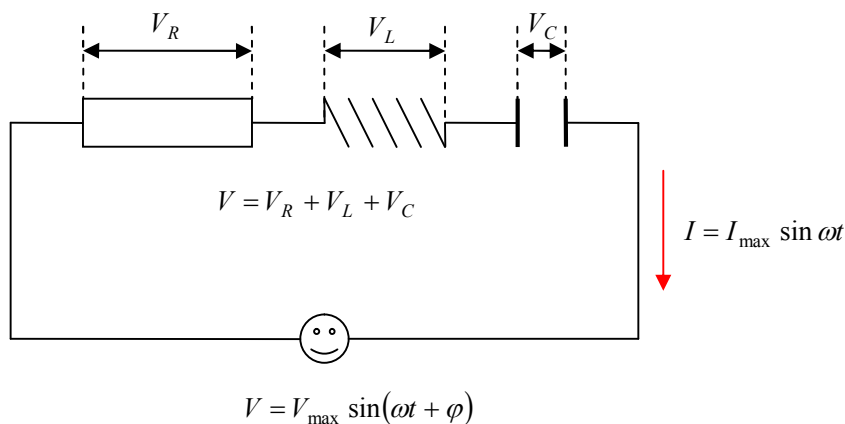
共振周波数を求める

コイルの電圧を V_L , コンデンサーの電圧を V_C , オーム抵抗の電圧を V_R ,

電流を $I = I_{\max} \sin \omega t$, 交流電源の起電力を $V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ (V_{\max} は一定) とする。

キルヒホッフの第二法則より,

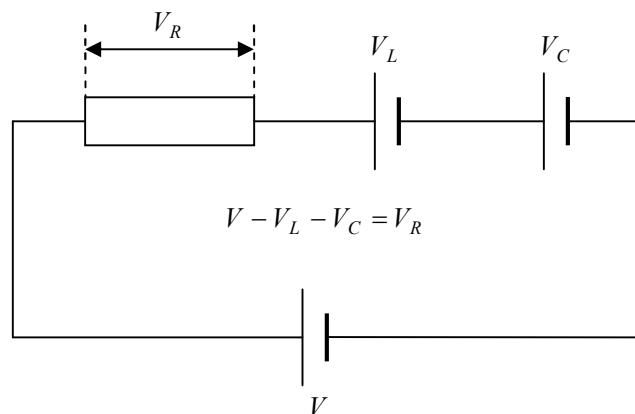
$$\begin{aligned} V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) &= V_R + V_L + V_C \\ &= R I_{\max} \sin \omega t + \omega L I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_{\max}}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= I_{\max} \left\{ R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \omega t \right\} \\ &= I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$



補足図

コイルとコンデンサーをそれぞれ起電力 V_L と V_C の電池に例えると、
電源の起電力の向きと逆向きだから、

キルヒホッフの第二法則より、 $V - V_L - V_C = V_R \quad \therefore V = V_R + V_L + V_C$



よって、

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \omega$$

また、 $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ は回路の抵抗にあたり、これをインピーダンスという。

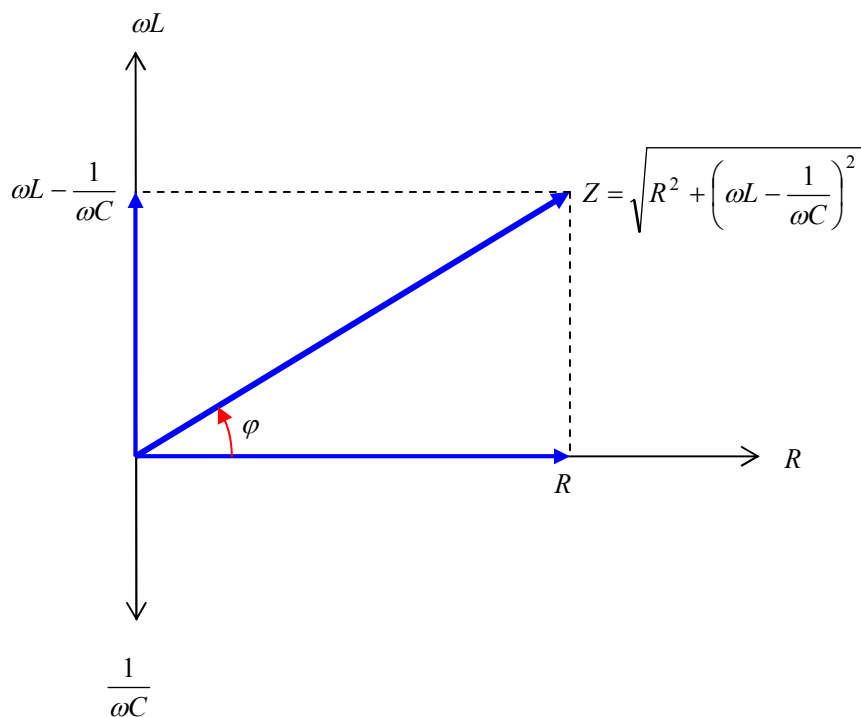
インピーダンスは記号 Z を使って表すので、 $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ となる。

ここで、

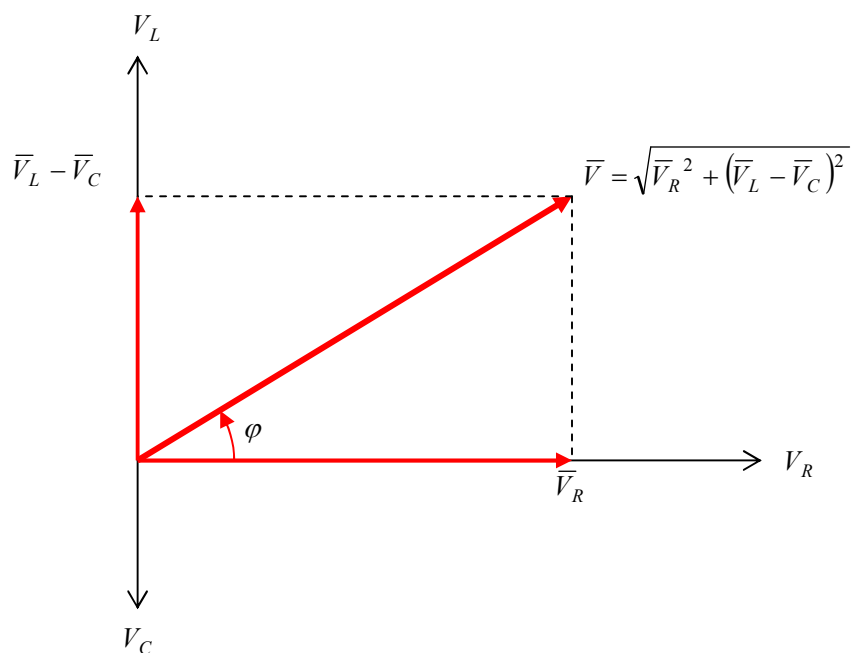
V_R の位相を横軸にとると、 V_L の位相は V_R より $\frac{\pi}{2}$ 進み、 V_C の位相は $\frac{\pi}{2}$ 遅れるから、

インピーダンス Z 、オーム抵抗 R 、誘導リアクタンス ωL 、容量リアクタンス $\frac{1}{\omega C}$ の

関係は次のように図示することができる。



また、起電力と電圧の実効値を \bar{V} 、 \bar{V}_L 、 \bar{V}_C 、 \bar{V}_R とすると、下図のようになる。



ここで V_{\max} は一定という条件の下, I_{\max} が最大値をとるのは,

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ より,}$$

$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ が最小値をとるとき, すなわち $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ になるときである。

このときの角振動数を ω_0 とすると, $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ より, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

よって, 共振周波数を f_0 とすると, $f_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$

(6)

交流回路の抵抗での消費電力

$$P_R = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin \omega t = I_{\max} V_{\max} \sin^2 \omega t = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} (1 - \cos 2\omega t) \text{ より,}$$

抵抗での消費電力の時間平均を \bar{P}_R とすると, $\cos 2\omega t$ の時間平均は 0 だから,

$$\bar{P}_R = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2}$$

また, $\bar{P}_R = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$ より,

\bar{P}_R は電流の実効値 $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ と電圧の実効値 $\frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$ の積である。

交流回路のコイルでの消費電力

$$P_L = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

コイルでの消費電力の時間平均を \bar{P}_L とすると, $\sin 2\omega t$ の時間平均は 0 だから, $\bar{P}_L = 0$
よって, コイルでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコイルに入る電流が増加すると, それが磁気エネルギーとなり,
減少するとき磁気エネルギーが電流となって回路に還元されることによる。

交流回路のコンデンサーでの消費電力

$$P_C = I_{\max} \sin \omega t \cdot V_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_{\max} V_{\max} \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

コイルでの消費電力の時間平均を \bar{P}_C とすると, $\sin 2\omega t$ の時間平均は 0 だから, $\bar{P}_C = 0$
よって, コンデンサーでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコンデンサーに入る電流が増加すると, それが静電エネルギーとなり,
減少するとき電流となって回路に還元されることによる。