

38. 床や壁との斜めの衝突

(1)

ボールの速度の水平成分は $v_0 \cos 60^\circ = \frac{v_0}{2}$ の等速度運動をするから、

壁に当たるときのボールの速度の水平成分も $\frac{v_0}{2}$ である。

水平方向に対して右斜め下 30° の角度で壁に当たるから、
ボールの鉛直下向きの速さを v_y とすると、

$$\frac{v_y}{\frac{v_0}{2}} = \tan 30^\circ$$

$$\therefore v_y = \frac{v_0}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

よって、鉛直上向きを正とすると、

壁に当たるときのボールの鉛直方向の速度は、

$$-v_y = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

これと、

鉛直方向の速度 $= v_0 \sin 60^\circ - gt = \frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt$ より、

$$\frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt = -\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g} \quad \dots (ア)$$

別解：2 次関数の相似性を利用して解く

放物運動だから、ボールの軌道は 2 次関数で表すことができる。

2 次関数同士は相似の関係にあり、その相似比は x^2 の係数の逆数の絶対値の比である。

たとえば、 $y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は、 $\left| \frac{1}{a} \right| : \left| \frac{1}{b} \right|$ より、 $|b| : |a|$ である。

(ア) 別解

水平右向きを始線とすると、

打ち出されたボールの速度の傾きは、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

壁に当たるときのボールの速度の傾きは、 $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ボールの軌道は $y = -x^2$ と相似だから、 $y = -x^2$ に置き換えると、

ボールが打ち出されたときと壁に当たるときの位置の水平成分は、

それぞれ、 $y = -x^2$ の接線の傾きが $\sqrt{3}$ 、 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標と対応する。

$y' = -2x$ より、接線の傾きが $\sqrt{3}$ 、 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる x 座標をそれぞれ x_1 、 x_2 とすると、

$$-2x_1 = \sqrt{3} \quad \therefore x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-2x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

頂点の x 座標は 0 だから、

x_1 と頂点の x 座標の距離は $|x_1|$ 、 x_2 と頂点の x 座標の距離は $|x_2|$ であり、 $|x_1| : |x_2| = 3 : 1$

この比は、2 次関数の相似性より、ボールの打ち出し点から最高到達点までの水平距離とボールの最高到達点から壁との衝突点までの水平距離の比が 3:1 であることを示している。

したがって、

打ち出されてから最高点に達するまでの時間を t_1 、

最高到達点から壁に当たるまでの時間を t_2 とすると、

ボールの速さの水平成分は $v_0 \cos 60^\circ$ だから、

$$v_0 \cos 60^\circ \cdot t_1 : v_0 \cos 60^\circ \cdot t_2 = |x_1| : |x_2| = 3 : 1$$

$$\therefore t_1 : t_2 = 3 : 1$$

よって、ボールが打ち出されてから壁に当たるまでの時間 $t_1 + t_2$ は、

$$t_1 + t_2 = t_1 + \frac{1}{3}t_1 = \frac{4}{3}t_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

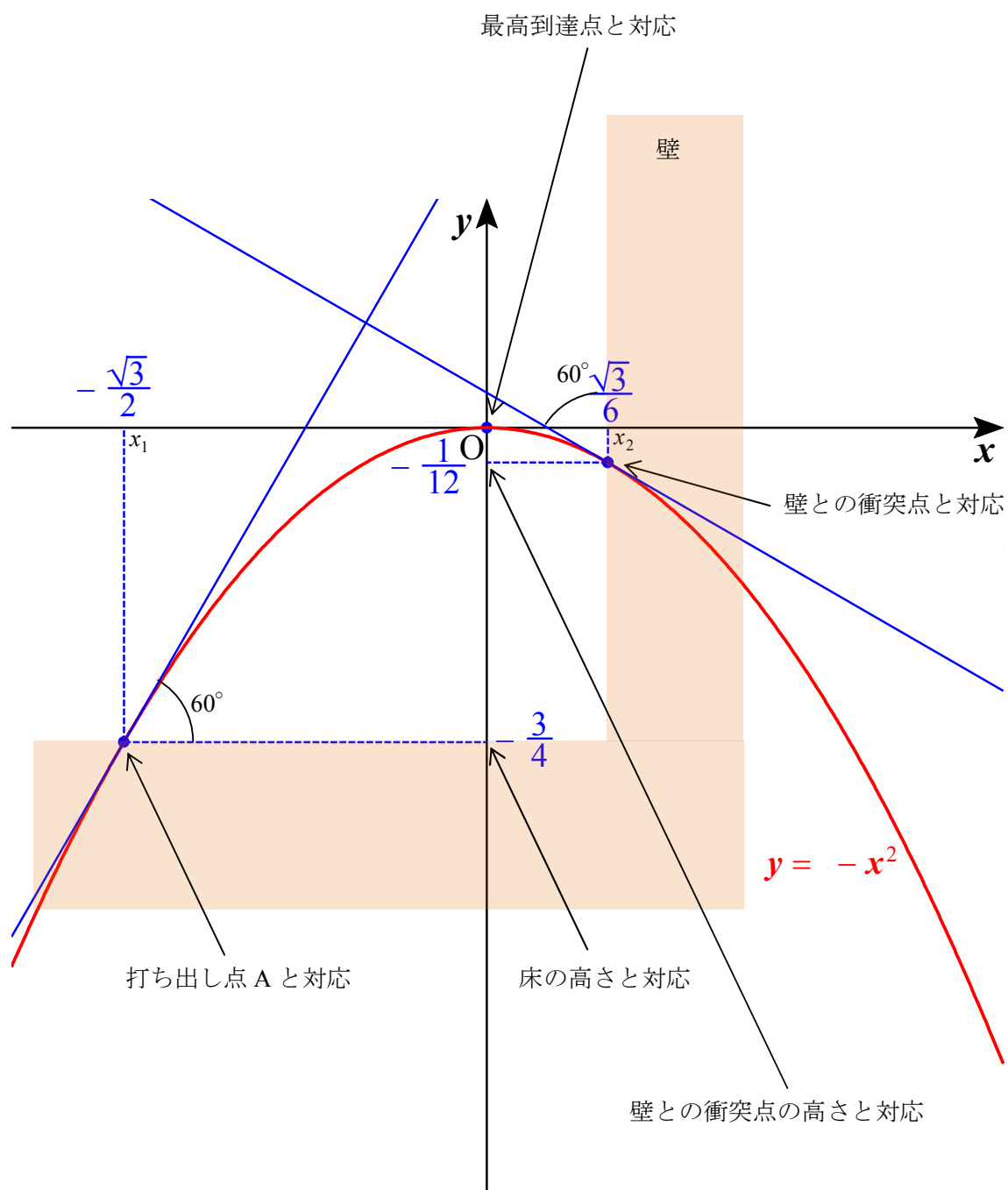
ボールの速度の鉛直成分 $v_0 \sin 60^\circ - gt$ が、最高到達点で 0 になることより、

$$v_0 \sin 60^\circ - gt_1 = \frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt_1 = 0$$

$$\therefore t_1 = \frac{\sqrt{3}v_0}{2g} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3}t_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}v_0}{2g} = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3g} \quad \dots \textcircled{ア}$$



(イ)別解

図より,

$$\text{最高到達点の床からの高さ} : \text{壁との衝突点の床からの高さ} = \frac{3}{4} : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} \right) = 9 : 8$$

最高到達点の床からの高さを h とすると,

最高到達点では, 鉛直方向の速度が 0 になるから,

$$0 - (v_0 \sin 60^\circ)^2 = 2 \cdot (-g) \cdot h \text{ より, } h = \frac{3v_0^2}{8g}$$

よって, 壁との衝突点の床からの高さは,

$$\frac{8}{9}h = \frac{8}{9} \cdot \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{v_0^2}{3g} \quad \dots (イ)$$

(2)

(エ) 別解

鉛直方向の速度は壁と平行だから, 衝突の影響を受けない。

よって,

最高到達点から床に衝突するまでの時間 = 打ち出してから最高到達に達するまでの時間 = t_1

また, (ア) 別解の解説より, 最高到達点に達してから壁と衝突するまでの時間 $t_2 = \frac{1}{3}t_1$

よって, 壁に衝突してから床に衝突するまでの時間を t_3 とすると,

$$t_3 = t_1 - t_2 = t_1 - \frac{1}{3}t_1 = \frac{2}{3}t_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}v_0}{2g} = \frac{\sqrt{3}v_0}{3g}$$

速度の水平成分は壁に垂直だから, 衝突の影響を受ける。

反発係数 e より, 衝突後の速度の水平成分の大きさは,

$$e \times v_0 \cos 60^\circ = \frac{ev_0}{2}$$

よって,

1 回目に床に衝突する地点は,

壁から

$$\frac{ev_0}{2} t_3 = \frac{ev_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}v_0}{3g} = \frac{\sqrt{3}ev_0^2}{6g} \quad \dots (エ)$$

(カ)

補足

鉛直成分は, 鉛直打ち上げ運動だから, 高さが同じ点でのボールの速さは等しい。

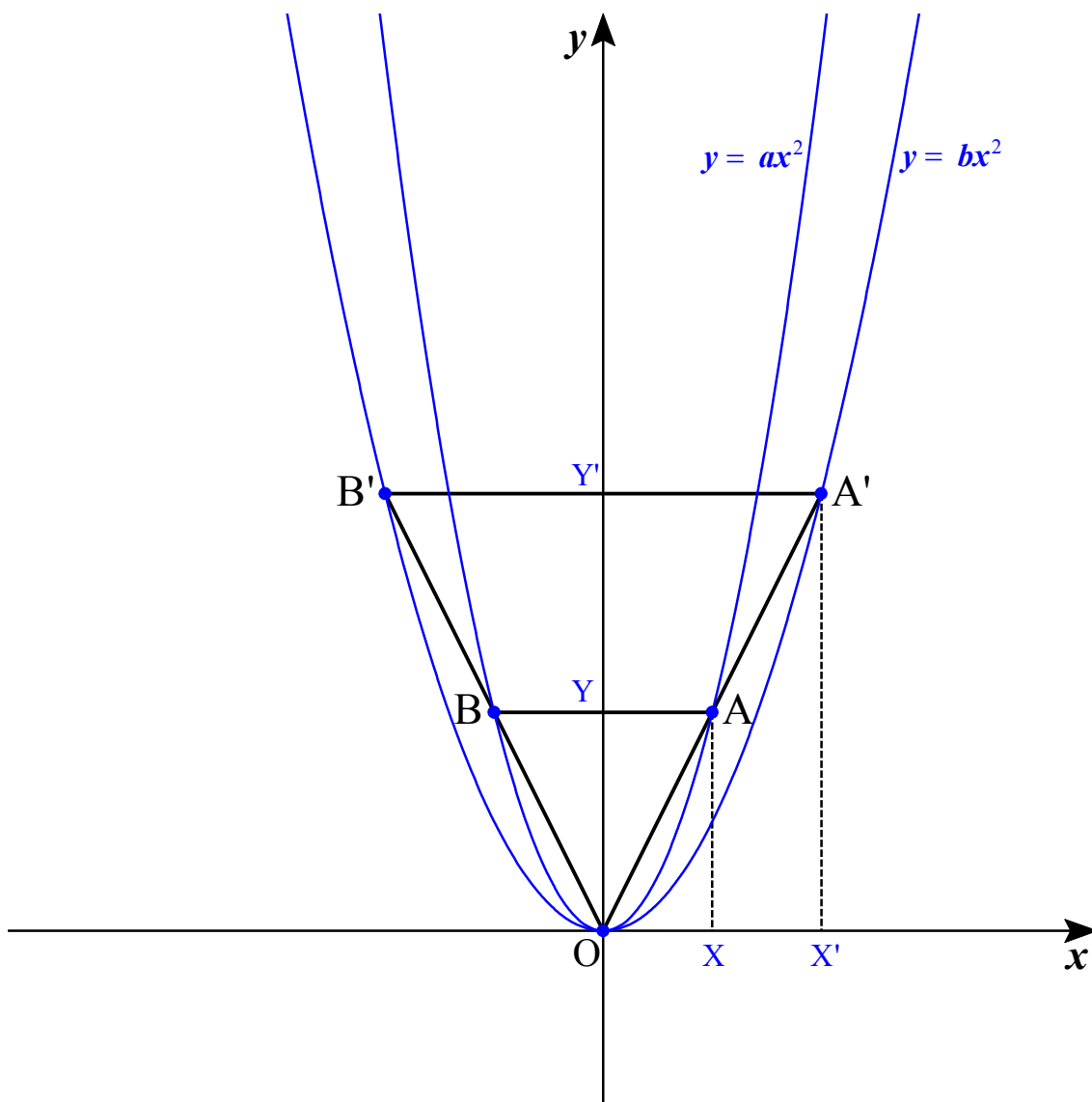
よって, 床に衝突する直前の速さの鉛直成分 = 打ち上げ時の速さの鉛直成分

2 次関数の相似比と相似中心

実数係数の 2 次関数はすべて相似あるいは合同であり、

たとえば、 $y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は $\left| \frac{1}{a} \right| : \left| \frac{1}{b} \right| = |b| : |a|$ である。

ここで、 $a > 0$ 、 $b > 0$ の場合を考え、その相似比を求めてみる。



図より、 $\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ の相似比が $y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比である。

$y = ax^2$ 上の任意の点を (X, Y) とすると、

$$Y = aX^2$$

両辺を $\frac{a}{b}$ 倍すると、 $\frac{a}{b}Y = \frac{a^2}{b}X^2$

よって、

$$\frac{a}{b}Y = b\left(\frac{a}{b}X\right)^2$$

これは、 $\left(\frac{a}{b}X, \frac{a}{b}Y\right)$ が $y = bx^2$ 上の点であることを示している。

よって、図より、

$$(X', Y') = \left(\frac{a}{b}X, \frac{a}{b}Y\right)$$

ゆえに、

$y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は $1:\frac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A' は、 $y = \frac{Y}{X}x$ と $y = bx^2$ との交点より、

$$(X', Y') = \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{Y}{X}, \frac{1}{b} \cdot \frac{Y^2}{X^2}\right)$$

$Y = aX^2$ より、 $\frac{Y}{X} = \frac{aX^2}{X} = aX$ 、 $\frac{Y}{X} = \frac{Y^2}{\frac{Y}{a}} = aY$ だから、

$$(X', Y') = \left(\frac{a}{b}X, \frac{a}{b}Y\right)$$

ゆえに、

$y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は $1:\frac{a}{b}$ より $b:a$

対応する点の接線の傾きは等しい

2 次関数の相似だから、対応する点の接線の傾きは等しくて当然だが、一応確かめてみよう。

$y = ax^2$ 上の点 A における接線の傾きを m とすると、 $y' = 2ax$ より、 $m = 2aX$

$y = bx^2$ 上の点 A' における接線の傾きを m' とすると、 $y' = 2bx$ より、 $m' = 2bX'$

ここで、 $X' = \frac{a}{b}X$ だから、 $m' = 2bX' = 2b \cdot \frac{a}{b}X = 2aX$

よって、 $m = m'$

別解 2

$\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ において、対応する点の接線の傾きは等しいことを使うと、

$y = ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2aX$

$y = bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2bX'$

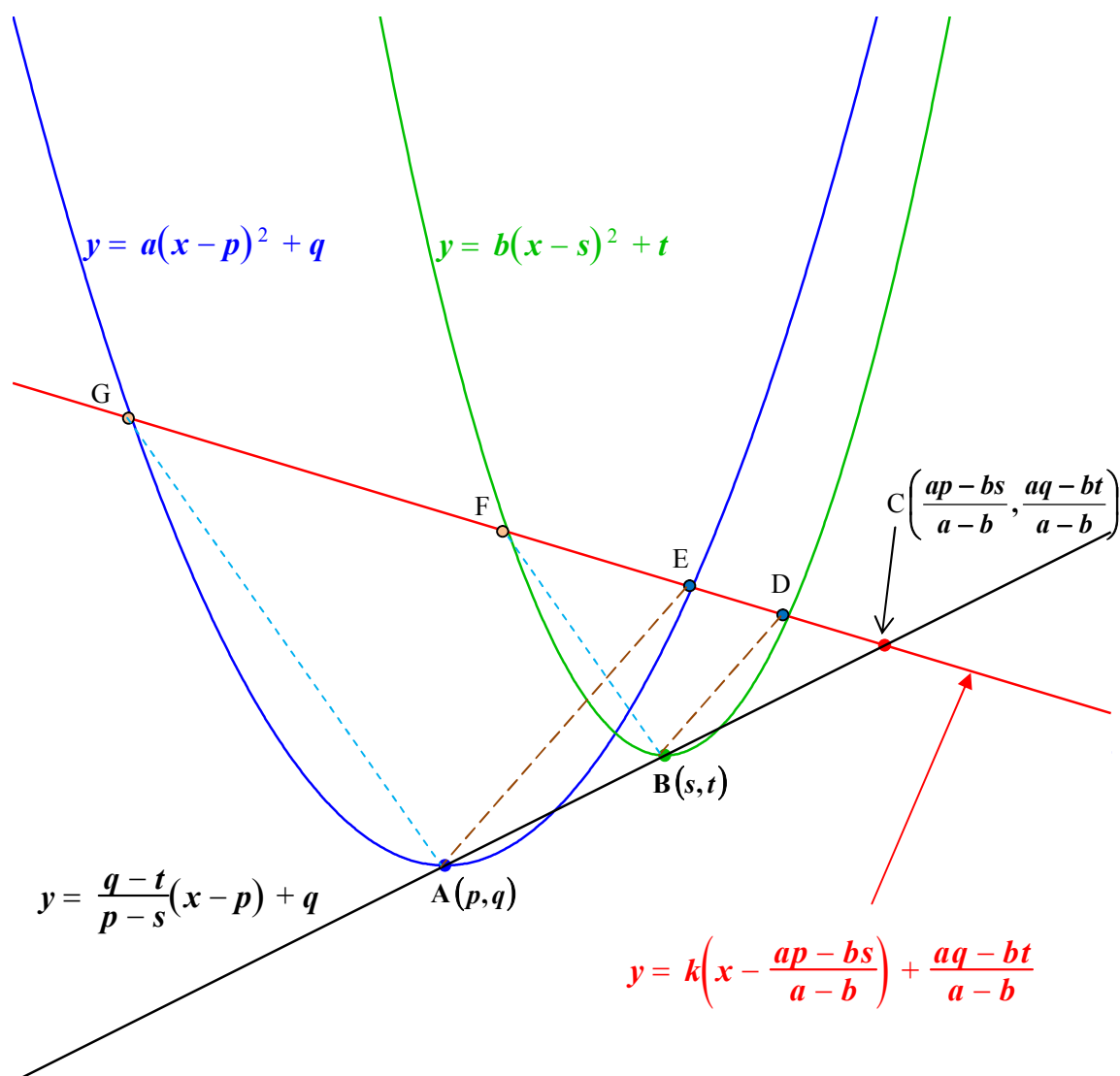
より、 $2aX = 2bX'$

$$\therefore \frac{X'}{X} = \frac{a}{b} \left(= \frac{Y'}{Y} \right)$$

このことから、 $y = bx^2$ は、 $y = ax^2$ を $\frac{a}{b}$ 倍に拡大したものであることがわかる。

よって、 $y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は $1 : \frac{a}{b} = b : a$

$y = a(x-p)^2 + q$ と $y = b(x-s)^2 + t$ の相似中心の求め方



相似中心を C , $y = a(x-p)^2 + q$ と $y = b(x-s)^2 + t$ の頂点をそれぞれ A , B とすると、対応する点の接線の傾きは等しいから、

頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上に相似中心 C があり、

$y = a(x-p)^2 + q$ と $y = b(x-s)^2 + t$ の相似比が $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$, すなわち $b:a$ であることより、

$AC:BC = b:a$, すなわち相似中心 C は、線分 AB を $b:a$ に外分する点である。

よって、 $C \left(\frac{ap-bs}{a-b}, \frac{aq-bt}{a-b} \right)$

相似中心を求めることでどんなことができるか？

ここで、相似中心 C を通る直線の傾きを k (k は実数) とすると、

$$\text{直線の式は、 } y = k \left(x - \frac{ap - bs}{a - b} \right) + \frac{aq - bt}{a - b}$$

この直線と $y = a(x - p)^2 + q$, $y = b(x - s)^2 + t$ との交点をそれぞれ E, D とすると、

C は相似中心だから、 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$

対応する点の接線の傾きは等しいから、

点 E における接線と点 D における接線の傾きは等しい。

同様に、点 F における接線と点 G における接線の傾きは等しい。

まとめ

2 次関数の相似中心を通る任意の直線と 2 次関数との交点から、

複数の 2 次関数において、接線の傾きが互いに等しい点を簡単に知ることができる。

物理の放物運動の問題を解くとき、2 次関数の相似性を利用する解き方もある。