48.　ケプラーの法則

万有引力の位置エネルギー

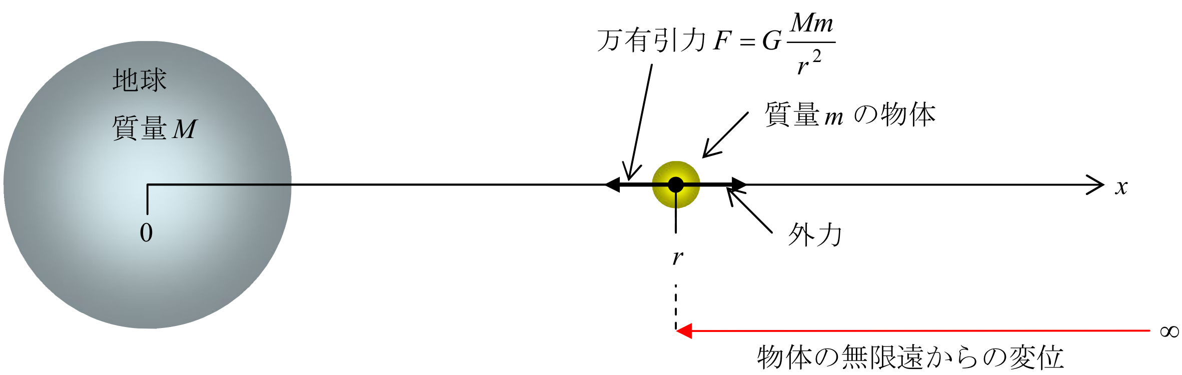
位置エネルギーの基準となる位置は任意で構わないが，
万有引力の場合は，通常，無限遠を位置エネルギーの基準位置とする。
位置エネルギーは保存力がする仕事に使われるから，
保存力（万有引力）のする仕事が W のとき，位置エネルギー変化は $-W$ である。
あるいは，保存力とつり合う外力がする仕事が W のとき，
この仕事は，位置エネルギーとして蓄えられるから，位置エネルギー変化は W である。
では，地球からの距離が r の位置における万有引力の位置エネルギーを，
万有引力とつり合う外力がする仕事から求めてみよう。
質量 m の物体を無限遠から地球からの距離が r の位置まで万有引力とつり合いの外力で移動させるとき，その外力がする微小の仕事は，

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = |\vec{F}||d\vec{x}|\cos 180° = -|\vec{F}||d\vec{x}| < 0$ だから，位置エネルギーは負となる。

よって，外力がする仕事の大きさを求めてから，符号を負にすればよい。

$\int_r^\infty dW = \int_r^\infty \frac{GMm}{x^2}dx = \left[-\frac{Gm}{x}\right]_r^\infty = \frac{GMm}{r}$ より，

地球からの距離が r の位置における万有引力の位置エネルギーは，$-\frac{GMm}{r}$ である。



よって，万有引力場では，少なくとも，

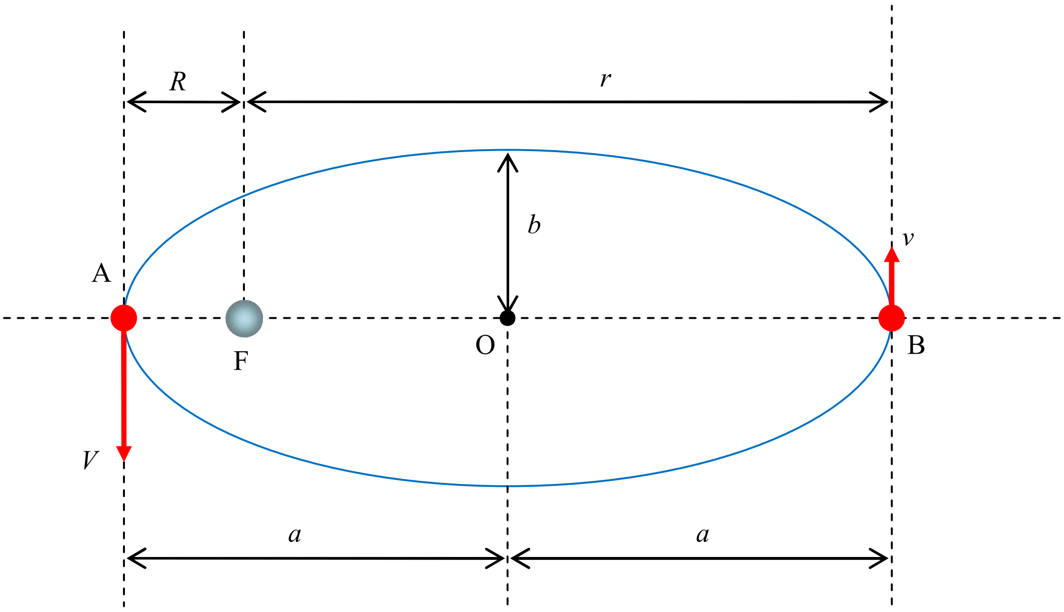
$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \text{一定}$$

が成り立つ。

ケプラーの第３法則

同一質点のまわりを回るすべての天体は，その軌道に関係なく，$\dfrac{T^2}{a^3}$＝一定である。

証明



質量 M の質点Ｆのまわりを楕円軌道している質量 m の質点で考える。
質点Ｆは楕円軌道の焦点でもある。
また，質量 m の質点がＡにあるときの速さを V，Ｂにあるときの速さを v とする。
ケプラーの第２法則（面積速度一定の法則）より，

$$\frac{1}{2}VR=\frac{1}{2}vr$$

$$\therefore v=\frac{R}{r}V \quad ・・・①$$

力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mV^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$\therefore V^2-\frac{2GM}{R}=v^2-\frac{2GM}{r} \quad ・・・②$$

①を②に代入すると，

$$V^2-\frac{2GM}{R}=\frac{R^2}{r^2}V^2-\frac{2GM}{r}$$

$$V^2\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)=2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

$$V^2\left(1-\frac{R}{r}\right)\left(1+\frac{R}{r}\right)=\frac{2GM}{R}\left(1-\frac{R}{r}\right)$$

$$V^2\left(1+\frac{R}{r}\right)=\frac{2GM}{R}$$

$$V^2=\frac{2GMr}{R(R+r)}$$

$$\therefore V=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

よって，

面積速度をhとすると，$h=\dfrac{1}{2}VR$より，

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GMRr}{R+r}} \quad \cdots ③$$

一方，楕円の性質から，

楕円の長軸半径$a=\dfrac{R+r}{2}$　・・・④

離心率$e=\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{\mathrm{OA}-\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}}=1-\dfrac{R}{a}$　・・・⑤

④，⑤より，

$$e=1-\frac{R}{\frac{R+r}{2}}=1-\frac{2R}{R+r}=\frac{-R+r}{R+r} \quad \cdots ⑥$$

楕円の短軸半径$b=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OF}^2}$，$e=\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}$より，

$$b=\sqrt{\mathrm{OA}^2-e^2\mathrm{OA}^2}=a\sqrt{1-e^2}$$

これと④，⑥より，

$$b=\frac{R+r}{2}\sqrt{1-\left(\frac{-R+r}{R+r}\right)^2}=\frac{R+r}{2}\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2}}$$

$$\therefore b=\sqrt{Rr} \quad \cdots ⑦$$

③に④，⑦を代入すると，

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GMRr}{R+r}}=\frac{\sqrt{Rr}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2GM}{R+r}}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

ここで，

面積速度h×周期T＝楕円の面積πabより，

$$T=\frac{\pi ab}{h}=\pi ab\cdot\frac{2}{b}\sqrt{\frac{a}{GM}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\sqrt{a^3}$$

$$\therefore T^2=\frac{4\pi^2}{GM}\cdot a^3$$

$\dfrac{4\pi^2}{GM}$は定数だから，

同一質点のまわりを回るすべての天体は，その軌道に関係なく，

$\dfrac{T^2}{a^3}$＝一定

である。

ケプラーの第 3 法則の簡単な導き方

楕円軌道であるので，正しくは上のように導かなければならないが，

ケプラーの第 3 法則は円軌道でも成り立つことがわかっている。

面積速度が一定だから，円軌道の天体は等速円運動をする。

引力と遠心力のつり合いあるいは天体の運動方程式より，

$$\frac{GMm}{a^2}=\frac{mv^2}{a}$$

$$\therefore a=\frac{GM}{v^2}\quad\cdots ⑧$$

周期と速さの関係より

$$T=\frac{2\pi a}{v}$$

$$\therefore v=\frac{2\pi a}{T}\quad\cdots ⑨$$

⑧，⑨より，

$$a=\frac{GM}{v^2}=\frac{GM}{\frac{4\pi^2a^2}{T^2}}=\frac{GMT^2}{4\pi^2a^2}$$

$$\therefore T^2=\frac{4\pi^2}{GM}\cdot a^3$$