50. 水平面内の等速円運動

(2)

$(x, y) = (a\cos(\omega t + \delta), a\sin(\omega t + \delta))$ $(0 \le \delta < 2\pi)$ とおくと，

$t = 0$ のとき，

$(a\cos\delta, a\sin\delta) = (0, a)$ より，

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

よって，

$$x = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -a\sin\omega t$$

$\omega = \dfrac{v}{a}$ より，

$$x = -a\sin\left(\frac{v}{a}t\right)$$

(3)

$dW = \vec{T}\cdot d\vec{x} = |\vec{T}||d\vec{x}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ より，

$$\int dW = 0$$

(4)

(b)

物体が点 A から x 軸上の点 P に達する直前までの速度の x 成分と y 成分を

v_x， v_y とすると， $(v_x, v_y) = (v\cos 30°, v\sin 60°) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}v, \dfrac{1}{2}v\right)$

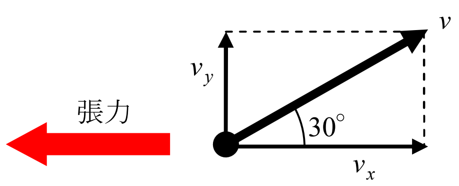
x 軸上の点 P に達すると物体は O 方向に張力を受け，

これが束縛力となって，速度の x 成分は 0 となる。

一方， y 軸方向には外力を受けないから，速度の y 成分は変化しない。

よって，点 P に達した直後の物体の速度の x 成分と y 成分は，$\left(0, \dfrac{1}{2}v\right)$ となり，

以後，半径 $2a$ ， 速さ $\dfrac{1}{2}v$ の等速円運動となる。



(c)

$2a\omega' = \dfrac{v}{2}$ より，

$\omega' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{v}{a} = \dfrac{1}{4}\omega$

よって，$\dfrac{1}{4}$ 倍になる。

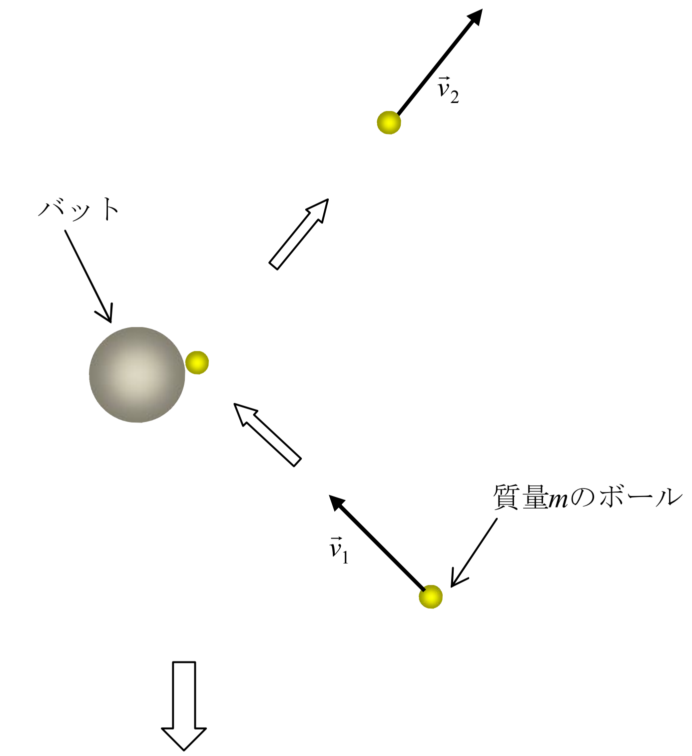
(d)

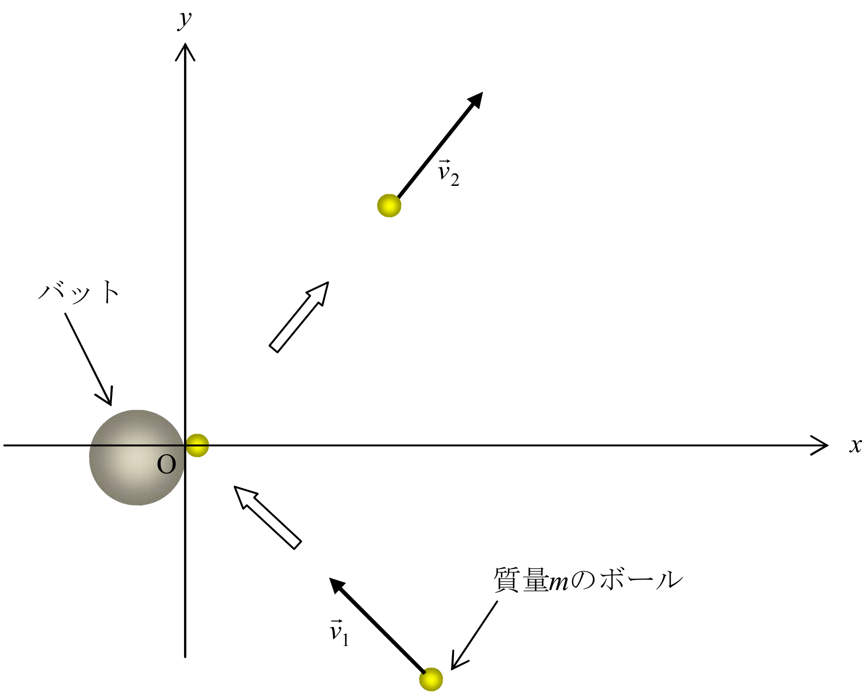
力積と運動量はベクトルなので，数ベクトルにしてから，大きさを求める。

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v} = m \cdot \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v \\ \dfrac{1}{2}v - \dfrac{1}{2}v \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}v \\ 0 \end{pmatrix}$$

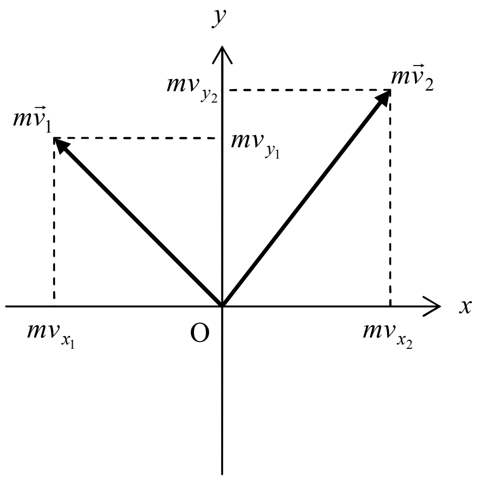
よって，受けた力積の大きさ $\left|\vec{F} \cdot \Delta t\right| = m\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2 + 0^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mv$

物体が受けた力積の大きさと向きの求め方





ボールがバットから受けた力積の大きさ



原点 O を始点とする位置ベクトルを xy 座標平面上にとり，
バットに衝突する直前と直後のボールの運動量の xy 成分を数ベクトルで表すと，

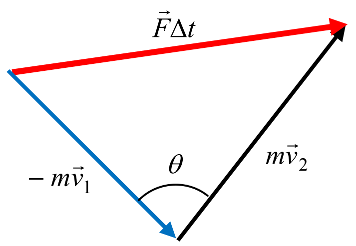
$m\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} mv_{x_1} \\ mv_{y_1} \end{pmatrix}$，$m\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} mv_{x_2} \\ mv_{y_2} \end{pmatrix}$ だから，運動量変化は，$\Delta m\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} mv_{x_2} - mv_{x_1} \\ mv_{y_2} - mv_{y_1} \end{pmatrix}$

よって，ボールが受けた力積の大きさは，

$$\left|\vec{F}\Delta t\right| = \left|m\Delta\vec{v}\right| = m\sqrt{\left(v_{x_2} - v_{x_1}\right)^2 + \left(v_{y_2} - v_{y_1}\right)^2}$$

余弦定理を使う方法もある

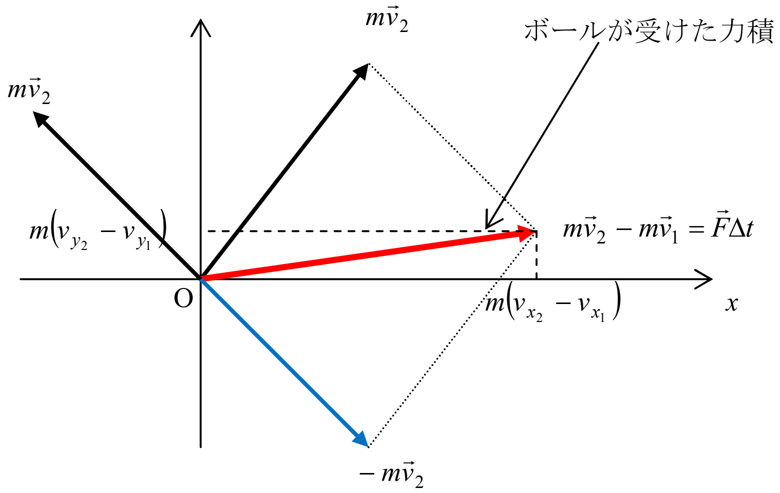
$m\vec{v}_1$ と $m\vec{v}_2$ のなす角を θ とすると，$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t$ は次のように図示できる。



よって，
余弦定理より，

$$\left|\vec{F}\Delta t\right| = \sqrt{m^2 v_1{}^2 + m^2 v_2{}^2 - 2m^2 v_1 v_2 \cos\theta}$$

ボールが受けた力積の図示



注意

「物体が受けた運動量を求めよ」という問題があるが，
これは，「物体が受けた力積を求めよ」という意味である。

(5)

角運動量保存則（課程外）

質点に作用する力の，点 O のまわりの力のモーメントが 0 であるとき，
点 O のまわりの質点の角運動量は変化しない。
とくに，質点が点 O から中心力だけを受けて運動するときは，
質点の O のまわりの角運動量は常に一定，すなわち保存される。

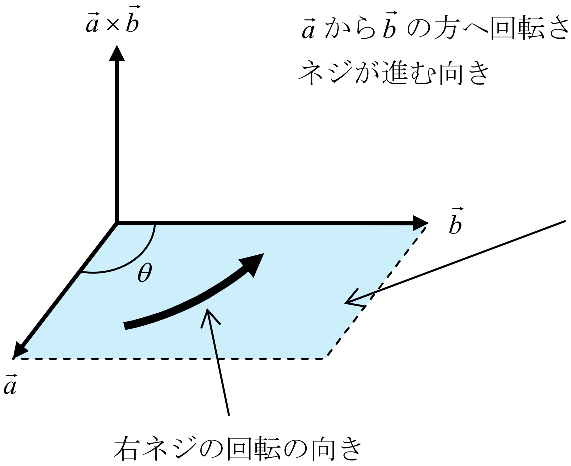
角運動量（課程外）

質点が原点 O を定点とする位置ベクトル $\vec{r}$ の点で，
$\vec{r}$ と角 θ の方向に，運動量 $m\vec{v}$ で運動するとき，
点 O のまわりの質点の角運動量 $\vec{L}$ は，$\vec{r}$ と $m\vec{v}$ の外積で定義される。

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$
$$|\vec{L}|=|\vec{r}||m\vec{v}|\sin\theta \quad (0\le\theta\le\pi)$$

外積（課程外）

$\vec{a}\times\vec{b}$ の向きは右ネジを
$\vec{a}$ から $\vec{b}$ の方へ回転させたときに
ネジが進む向き



$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$

=平行四辺形の面積